Операционное исчисление. Пример нахождения оригинала

ЗАДАНИЕ. Найти оригинал для функции с помощью вычетов

$$F^*(p)=\frac{1}{e^{4p}-625}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$F^*(p)=\frac{1}{e^{4p}-625}=\frac{1}{(e^{2p}-25)(e^{2p}+25)}=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{(e^{2p}-25)}-\frac{1}{(e^{2p}+25)}\right)=$$

$$=\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{(e^{p}-5)(e^{p}+5)}-\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{(e^{2p}+25)}=$$

$$=\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(e^{p}-5)}-\frac{1}{(e^{p}+5)}\right)-\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{(e^{2p}+25)}=$$

$$=\frac{1}{500}\cdot\frac{1}{(e^{p}-5)}-\frac{1}{500}\cdot\frac{1}{(e^{p}+5)}-\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{(e^{2p}+25)}$$

С помощью вычетов найдем оригиналы для $\frac{1}{(e^p-5)}$ и $\frac{1}{(e^p+5)}$

Замена $z=e^p$

$$res_{z=5}\left(\frac{1}{z-5}\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to 5}\left(\frac{1}{z-5}\cdot(z-5)z^{n-1}\right)=5^{n-1}$$

$$\frac{1}{(e^p-5)}\leftrightarrow 5^{n-1}$$

$$res_{z=-5}\left(\frac{1}{z+5}\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to -5}\left(\frac{1}{z+5}\cdot(z+5)z^{n-1}\right)=(-5)^{n-1}$$

$$\frac{1}{(e^p+5)}\leftrightarrow (-5)^{n-1}$$

Известно, что

$$e^{an}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\leftrightarrow\frac{e^a e^p}{e^{2p}+e^{2a}}$$

$$25=e^{\ln 25}=e^{2\ln 5}$$

$$\frac{1}{(e^{2p}+25)}=\frac{1}{e^{\ln 5}}\cdot\frac{e^{\ln 5}e^{p}}{e^{2p}+e^{2\ln 5}}\leftrightarrow\frac{1}{e^{\ln\sqrt{5}}}\cdot e^{n\cdot\ln 5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)=5^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Итак, искомый оригинал:

$$f(n)=\frac{5^{n-1}}{500}-\frac{(-5)^{n-1}}{5000}-\frac{5^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{50}$$