Методы оптимизации

ЗАДАНИЕ. Для заданной функции без ограничений найти стационарные точки, проверить их на экстремальность, а также найти все локальные и глобальные минимумы и максимумы

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to extr.$$

РЕШЕНИЕ.

Находим стационарные точки из условий равенства нулю частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2 = 0 \\ 3x_2^2 - 3x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_2^2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1^4 - x_1 = 0 \end{cases}$$

найдём решение второго уравнения

$x_1^4 - x_1 = 0;$

$x_1(x_1^3 - 1) = 0;$

$x_1 = 0$ или $x_1^3 - 1 = 0;$

$x_1^3 = 1;$

$x_1 = 1.$

Подставляя полученные значения в первое уравнение, получаем две стационарные точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

Для проверки на наличие экстремума найдём производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=6x_1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=-3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=6x_2.$$

Определим значения производных в стационарных точках. Для точки $M_1(0,0)$

$$A_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{M_1}=0, \qquad B_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{M_1}=-3, \qquad C_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{M_1}=0.$$

Составим определитель

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0$ – в этой стационарной точке нет экстремума.

Для точки $M_2(1,1)$

$$A_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{M_2}=6, \qquad B_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{M_2}=-3, \qquad C_2=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{M_2}=6.$$

Составим определитель

$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=36-9=27>0$ – экстремум есть.

Поскольку $A_2=6>0$, то точка $M_2(1,1)$ – точка локального минимума.

Находим значение функции в этой точке $f_{\min}=f(M_2)=f(1,1)=1+1-3=-1$.

Поскольку функция не является ограниченной и рассматривается на всей области определения, т.е. всей координатной плоскости, то найденная точка M_2 не будет являться наименьшим значением функции во всей этой области, а значит, не будет являться точкой глобального минимума.

ОТВЕТ:

Точка локального минимума $M_2(1,1)$, $f_{\min}=-1$. Точек глобального экстремума нет.