

Проверка гипотезы о равенстве средних значений

ЗАДАНИЕ. Производительность каждого из агрегатов А и В составила (в кг вещества за час работы):

Номер замера	1	2	3	4	5
Агрегат А	14,1	13,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат В	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Можно ли считать производительность агрегатов А и В одинаковой в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей, при уровне значимости $\alpha = 0,1$?

УКАЗАНИЕ: задача решается в два этапа: на первом этапе проверяется гипотеза о равенстве дисперсий случайных величин А и В (производительности рассматриваемых агрегатов А и В), на втором этапе проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий тех же случайных величин А и В.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим первую выборку (агрегат А) X , вторую выборку (агрегат В) Y . Найдем выборочные числовые характеристики выборок.

						Сумма
x_i	14,1	13,1	14,7	13,7	14	69,6
$(x_i - \bar{x})^2$	0,0324	0,6724	0,6084	0,0484	0,0064	1,368

Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{69,6}{5} = 13,92$.

Выборочная исправленная дисперсия $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1,368}{4} = 0,342$.

						Сумма
y_i	14	14,5	13,7	12,7	14,1	69
$(y_i - \bar{y})^2$	0,04	0,49	0,01	1,21	0,09	1,84

Выборочное среднее $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum y_i = \frac{69}{5} = 13,8$.

Выборочная исправлена дисперсия $s_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1,84}{4} = 0,46$.

Исправленные дисперсии различны, поэтому проверим гипотезу о равенстве дисперсий, используя критерий Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = \frac{0,46}{0,342} \approx 1,345 .$$

В качестве конкурирующей гипотезы примем гипотезу $H_1 : D(X) \neq D(Y)$. По таблице при уровне значимости $\alpha/2 = 0,1/2 = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = m - 1 = 4$ и $k_2 = n - 1 = 4$ найдем критическую точку $F_{кр}(0,05, 4, 4) = 6,39$. Так как $F_{набл} = 1,345 < 6,39 = F_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Итак, предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, поэтому сравним средние.

Введем нулевую гипотезу: $H_0 : M(X) = M(Y)$. Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле:

$$T_{набл.} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n+m-2)}{n+m}} .$$

Получаем:

$$T_{набл.} = \frac{13,92 - 13,8}{\sqrt{4 \cdot 0,342 + 4 \cdot 0,46}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{10}} \approx 0,3 .$$

Находим критическую точку (двусторонняя область) из таблицы Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,1$ и числу степеней свободы $k = m + n - 2 = 8$ $t_{ов.кр} = 1,86$. Так как наблюдаемое значение критерия 0,3 меньше критического, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, то есть можно сказать, что производительность агрегатов А и В одинакова.

ОТВЕТ: Производительность одинакова