Нелинейное программирование

ЗАДАНИЕ. Решить задачу методом Зойтендейка. Вычисления вести в натуральных дробях.

$$\max(-6x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Пусть $\overline{x_0} = (0,4)$.

РЕШЕНИЕ.

Метод Зойтендейка – представитель класса методов возможных направлений. На каждой итерации метода находят возможное направление спуска, а затем проводят оптимизацию вдоль этого направления. Из начальной точки $\overline{x_0}$, лежащей внутри области допустимых значений переменных, движение осуществляется по направлению вектора градиента $\nabla F\left(\overline{x_0}\right)$ до тех пор, пока не будет достигнута граница области либо максимальное значение вдоль направления.

Обозначим целевую функцию $F = -6x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_2 \to \max$

Шаг 0

Координаты начальной точки $\overline{x_0} = (0,4)$ удовлетворяют всем ограничениям системы, а значит, точка является допустимой. Значение функции в этой точке $F\left(\overline{x_0}\right) = 0 - 16 + 0 + 40 = 24$.

Шаг 1

Найдём вектор градиента ∇F функции F в точке $\overline{x_0}$

$\nabla F = \left(-12x_1 + 2x_2, -2x_2 + 2x_1 + 10\right)$,

$\nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (8, 2)$.

Тогда координаты новой точки

$\overline{x_1} = \overline{x_0} + \alpha_0 \cdot \nabla F\left(\overline{x_0}\right) = (0 + 8\alpha_0, 4 + 2\alpha_0) = (8\alpha_0, 4 + 2\alpha_0)$.

Шаг 2

Определим интервал допустимых значений для параметра α_0, подставляя координаты точки $\overline{x_1}$ в систему ограничений задачи

$$\begin{cases} 16\alpha_0 + 4 + 2\alpha_0 \le 5 \\ 16\alpha_0 + 4 + 2\alpha_0 \ge 2 \\ 8\alpha_0 \ge 0 \\ 4 + 2\alpha_0 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 18\alpha_0 \le 1 \\ 18\alpha_0 \ge -2 \\ 8\alpha_0 \ge 0 \\ 2\alpha_0 \ge -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 \le \dfrac{1}{18} \\ \alpha_0 \ge -\dfrac{1}{9} \\ \alpha_0 \ge 0 \\ \alpha_0 \ge -2 \end{cases} \quad 0 \le \alpha_0 \le \frac{1}{18}.$$

Шаг 3

Необходимо выбирать такую величину шага α_0, которая обеспечит функции F максимум. Если рассматривать $\overline{x_0}$ как строку, то искомое значение параметра можно найти из условия равенства нулю скалярного произведения этих векторов $\nabla F(\overline{x_1}) \cdot \nabla F(\overline{x_0}) = 0$.

Подставляя $\overline{x_1} = (8\alpha_0, 4 + 2\alpha_0)$ в выражения для координат вектора градиента ∇F, получим

$$\nabla F(\overline{x_1}) = (-96\alpha_0 + 8 + 4\alpha_0, 16\alpha_0 - 8 - 4\alpha_0 + 10) = (-92\alpha_0 + 8, 12\alpha_0 + 2).$$

Тогда

$$\nabla F(\overline{x_1}) \cdot \nabla F(\overline{x_0}) = (-92\alpha_0 + 8) \cdot 8 + (12\alpha_0 + 2) \cdot 2 = 68 - 712\alpha_0.$$

Приравниваем полученное выражение к нулю и получаем искомое значение параметра

$$68 - 712\alpha_0 = 0;$$

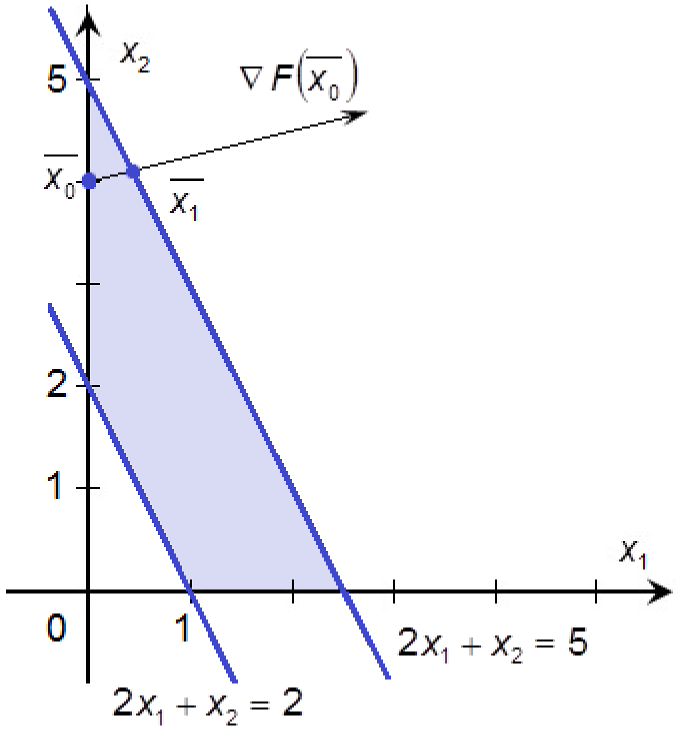
$$\alpha_0 = \frac{17}{178}.$$

Поскольку $\frac{17}{178} > \frac{1}{18}$, то есть найденное значение расположено правее отрезка $0 \le \alpha_0 \le \frac{1}{18}$, то принимается правая граница $\alpha_0 = \frac{1}{18}$. А тогда

$$\overline{x_1} = (8\alpha_0, 4 + 2\alpha_0) = \left(\frac{8}{18}, 4 + \frac{2}{18}\right) = \left(\frac{4}{9}, 4 + \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{37}{9}\right).$$

Тогда

$$\nabla F(\overline{x_1}) = \left(-\frac{92}{18} + 8, \frac{12}{18} + 2\right) = \left(\frac{26}{9}, \frac{8}{3}\right).$$



Шаг 4

Точка $\overline{x_1}$ находится на границе области допустимых значений переменных, а движение в направлении вектора $\nabla F(\overline{x_1})$ выведет за пределы этой области. Поэтому следующую точку поиска будем находить с использованием формулы $\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} + \alpha_k S_k$, где S_k – новое направление движения, составляющее минимальный острый угол с вектором градиента и направлено либо внутрь области, либо по её границе.

Точка $\overline{x_1}$ лежит на прямой $2x_1 + x_2 = 5$. В таком случае говорят, что ограничение $2x_1 + x_2 \le 5$ является активным в этой точке. Обозначим вектор коэффициентов при переменных в этом уравнении $a_1 = (2,1)$.

Направление $S_1 = (b_1, b_2)$ очередного шага определяется из условия равенства нулю скалярного произведения векторов $a_1 S_1 = 0$. Находим

$a_1 S_1 = 2b_1 + b_2 = 0$;

$b_2 = -2b_1$.

Находим единичный вектор из условия $|S_1| = 1$. Длина вектора S_1

$|S_1| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{b_1^2 + (-2b_1)^2} = \sqrt{5b_1^2} = \sqrt{5}b_1 = 1$;

откуда

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Тогда $b_2 = -2b_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Тогда $S_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Шаг 5

Следующая точка $\overline{x_2} = \overline{x_1} + \alpha_1 S_1$, то есть

$$\overline{x_2} = \left(\frac{4}{9}, \frac{37}{9}\right) + \alpha_1\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{4}{9} + \alpha_1\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{37}{9} - \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Находим значение параметра α_1, при котором точка $\overline{x_2}$ принадлежит области допустимых значений переменных. Первое неравенство выполнится автоматически, поскольку точка $\overline{x_2}$ лежит на этой прямой.

$$\begin{cases} \frac{8}{9} + \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{37}{9} - \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5} \le 5 \\ \frac{8}{9} + \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{37}{9} - \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5} \ge 2 \\ \frac{4}{9} + \alpha_1\frac{\sqrt{5}}{5} \ge 0 \\ \frac{37}{9} - \alpha_1\frac{2\sqrt{5}}{5} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 \le 5 \\ 5 \ge 2 \\ \alpha_1 \ge -\frac{4\sqrt{5}}{9} \\ \alpha_1 \le \frac{37\sqrt{5}}{18} \end{cases} \qquad -\frac{4\sqrt{5}}{9} \le \alpha_1 \le \frac{37\sqrt{5}}{18}.$$

Шаг 6

Находим параметр α_1, доставляющий максимум функции F в направлении вектора S_1. Для этого подставим координаты точки $\overline{x_2}$ в функцию F

$$h(\alpha_1) = F(\overline{x_2}) = \frac{2161}{81} - \frac{22\sqrt{5}}{45}\alpha_1 - \frac{14}{5}\alpha_1^2;$$

находим производную

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = -\frac{22\sqrt{5}}{45} - \frac{28}{5}\alpha_1;$$

$\frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = 0$ при $-\frac{22\sqrt{5}}{45} - \frac{28}{5}\alpha_1 = 0$;

$$\frac{22\sqrt{5}}{9} + 28\alpha_1 = 0;$$

$\alpha_1 = -\frac{11\sqrt{5}}{126}$, и это точка максимума, т.к. $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_1^{\,2}} = -\frac{28}{5} < 0$.

Это значение входит в промежуток $\frac{4\sqrt{5}}{9} \le \alpha_1 \le \frac{37\sqrt{5}}{18}$, поэтому принимаем его за новый шаг $\alpha_1 = -\frac{11\sqrt{5}}{126}$. Теперь можно найти координаты точки

$$\overline{x_2} = \left(\frac{4}{9} + \alpha_1 \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{37}{9} - \alpha_1 \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{4}{9} - \frac{11\sqrt{5}}{126} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{37}{9} + \frac{11\sqrt{5}}{126} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) =$$

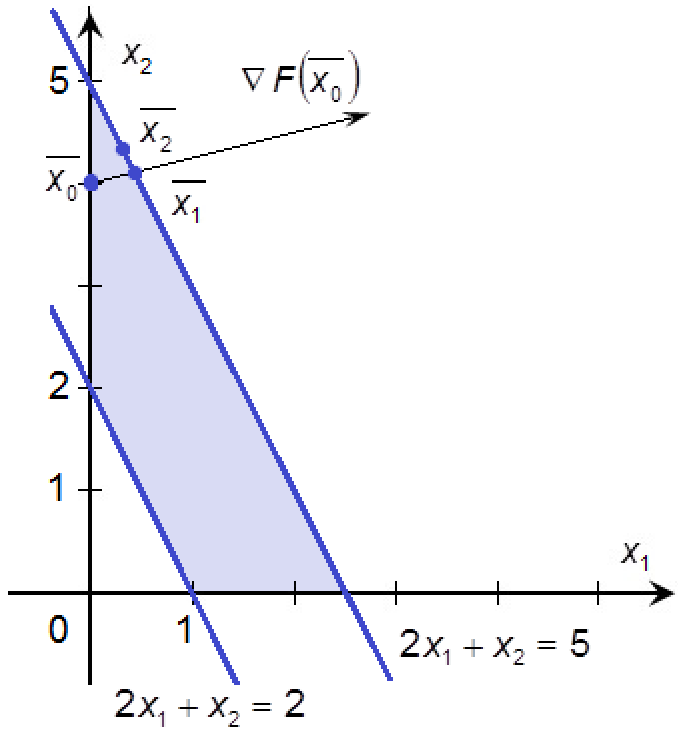
$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{11}{126}, \frac{37}{9} + \frac{22}{126}\right) = \left(\frac{56-11}{126}, \frac{518+22}{126}\right) = \left(\frac{45}{126}, \frac{540}{126}\right) = \left(\frac{5}{14}, \frac{30}{7}\right).$$

Находим координаты вектора градиента в этой точке

$$\nabla F(\overline{x_2}) = \left(-\frac{30}{7} + \frac{60}{7}, -\frac{60}{7} + \frac{5}{7} + 10\right) = \left(\frac{30}{7}, \frac{15}{7}\right).$$

Поскольку скалярное произведение

$\nabla F(\overline{x_2}) \cdot S_1 = \frac{30}{7} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{15}{7} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{6\sqrt{5}}{7} - \frac{6\sqrt{5}}{7} = 0$, то вектор $\nabla F(\overline{x_2})$ ортогонален вектору S_1, а значит, найденная точка $\overline{x_2} = \left(\frac{5}{14}, \frac{30}{7}\right)$ доставляет целевой функции F максимум.



Шаг 7

Находим максимальное значение функции

$$F_{max} = F(\overline{x_2}) = -6 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{30}{7} + 10 \cdot \frac{30}{7} = -\frac{75}{98} - \frac{900}{49} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{30}{7} + 10 \cdot \frac{30}{7} = -\frac{75}{98} - \frac{900}{49} + \frac{150}{49} + \frac{300}{7} = \frac{-75 - 1500 + 4200}{98} = \frac{375}{14}.$$

ОТВЕТ:

$\max(-6x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_2) = \frac{375}{14}$ достигается в точке $\overline{x_2} = \left(\frac{5}{14}, \frac{30}{7}\right)$.