Решение задачи выпуклого программирования методом Лагранжа и графическим методом

ЗАДАНИЕ.

Дана задача выпуклого программирования. Требуется:

1) найти решение графическим методом,
2) написать функцию Лагранжа данной задачи и найти её седловую точку, используя решение задачи, полученное графически:

$$(x_1-5)^2+(x_2-1)^2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le -6, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

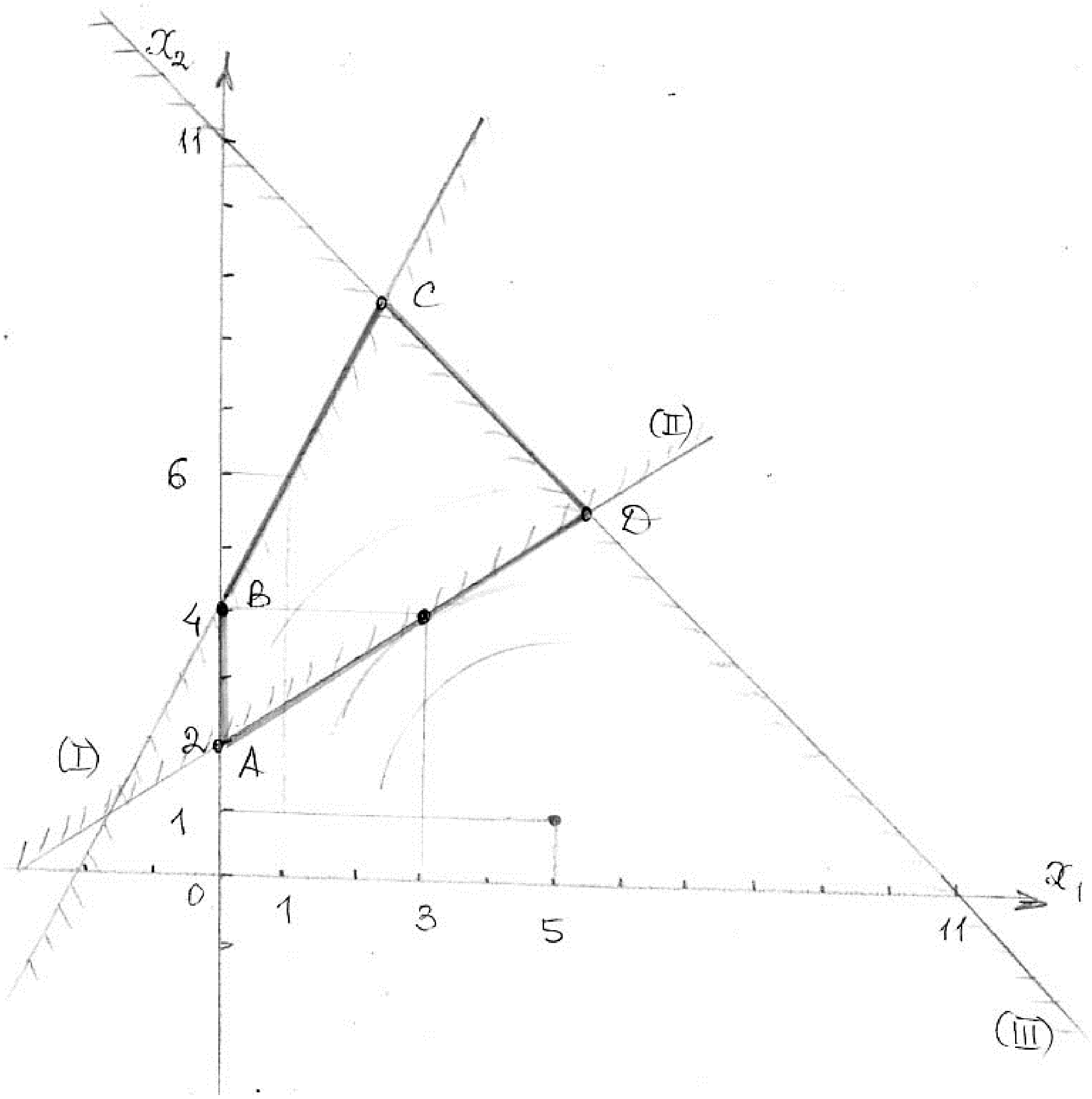
РЕШЕНИЕ.

Найдем решение задачи графическим методом. Сначала построим область допустимых решений в первой четверти, ограниченную прямыми:

(I) $2x_1 - x_2 = -4,$ точки (0,4) и (1,6)

(II) $2x_1 - 3x_2 = -6,$ точки (0, 2) и (3, 4).

(III) $x_1 + x_2 = 11,$ точки (11,0) и (0,11)



Получаем выпуклый многоугольник $ABCD$. Теперь строим линии уровня целевой функции: концентрические окружности радиуса r с центром в точке (5,1): $(x_1-5)^2+(x_2-1)^2=r^2$. Чем меньше радиус, тем меньше значение целевой функции. Таким образом, выбираем такую точку в области допустимых решений, которой касается окружность наименьшего радиуса. Из чертежа видно, что это точка В с координатами (3,4), в ней значение целевой функции будет наименьшим и будет равно:

$(3-5)^2+(4-1)^2=4+9=13.$

Теперь решим задачу аналитически. Обозначим целевую функцию:

$R=(x_1-5)^2+(x_2-1)^2$

Составим функцию Лагранжа для данной задачи:

$L=\lambda_0\left[(x_1-5)^2+(x_2-1)^2\right]+\lambda_1(-2x_1+x_2-4)+\lambda_2(2x_1-3x_2+6)+\lambda_3(x_1+x_2-11)$.

Для простоты ограничения неотрицательности переменных записывать не будем, просто уберем посторонние решения, если они появятся.

Запишем систему, включающую необходимые условия экстремума и условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases}\lambda_0\left(2x_1-10\right)-2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_0\left(2x_2-2\right)+\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1(-2x_1+x_2-4)=0,\\ \lambda_2(2x_1-3x_2+6)=0,\\ \lambda_3(x_1+x_2-11)=0.\end{cases}$$

При $\lambda_0=0$ система, очевидно, вырождается (единственное решение $x_1=x_2=0$, $R(0,0)=25+1=26$), поэтому положим $\lambda_0=\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{cases}x_1-5-2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0,\\ x_2-1+\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1(-2x_1+x_2-4)=0,\\ \lambda_2(2x_1-3x_2+6)=0,\\ \lambda_3(x_1+x_2-11)=0.\end{cases}$$

Решения данной системы:

Решение 1. $x_1=3, x_2=4$, $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=0$. Целевая функция $R(3,4)=13$.

Решение 2. $x_1=-3/2, x_2=1$, $\lambda_1=-39/8, \lambda_2=-13/8, \lambda_3=0$. Не удовлетворяет ограничениям задачи.

Решение 3. $x_1 = 27/5, x_2 = 28/5$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 21/25, \lambda_3 = -52/25$. Не удовлетворяет ограничениям задачи.

Решение 4. $x_1 = 15/2, x_2 = 7/2$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -5/2$. Не удовлетворяет ограничениям задачи.

Решение 5. $x_1 = 5, x_2 = 1$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Не удовлетворяет ограничениям задачи.

Решение 6. $x_1 = 7/3, x_2 = 26/3$, $\lambda_1 = -31/9, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -38/9$. Целевая функция $R(7/3, 26/3) = \frac{593}{9} \approx 65,889$.

Решение 7. $x_1 = -1/5, x_2 = 18/5$, $\lambda_1 = -13/5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Не удовлетворяет ограничениям задачи.

Получили решение $x_1 = 3, x_2 = 4, R_{\min} = 13$.

Решения совпали.