Система непрерывных случайных величин

Пример решения задачи

Задание. Плотность вероятности системы случайных величин равна
$f(x,y)=c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *при* $x^2+y^2\le R^2$,

Определить:
А) постоянную c;
Б) вероятность попадания в круг радиуса $a<R$, если центры обоих кругов совпадают с началом координат.

Решение. Найдем постоянную c из условия нормировки:
$\iint\limits_D f(x)dxdy=1$, где D - круг $x^2+y^2\le R^2$.
Получаем:
$$\iint\limits_D f(x)dxdy=\iint\limits_D c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$$
Перейдем к полярной системе координат:
$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$
$dxdy=rdrd\varphi$, $\sqrt{x^2+y^2}=r$.
Область D: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le R$.
$$=c\iint\limits_D (R-r)rdrd\varphi=c\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R(Rr-r^2)dr=2\pi c\left(\frac{1}{2}Rr^2-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=$$
$$=2\pi c\left(\frac{1}{2}R^3-\frac{1}{3}R^3\right)=\frac{\pi c}{3}R^3=1$$
Отсюда $c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.
Плотность распределения.
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right) & при\ \ x^2+y^2\le R^2, \\ 0 & при\ \ x^2+y^2>R^2. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания значений случайной величины в круг $x^2+y^2\le a^2<R^2$ - область D_1. Вероятность равна интегралу от совместной плотности распределения по данной области. Аналогично предыдущему случаю сразу перейдем к полярным координатам, при этом область D_1: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le a$. Получаем:
$$P=\iint\limits_{D_1} f(x)dxdy=\frac{3}{\pi R^3}\iint\limits_{D_1}(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{3}{\pi R^3}\iint\limits_{D_1}(R-r)rdrd\varphi=$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (Rr-r^2)dr = 2\pi\frac{3}{\pi R^3}\left(\frac{1}{2}Rr^2-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{6}{R^3}\left(\frac{1}{2}Ra^2-\frac{1}{3}a^3\right)= .$$

$$=\frac{6}{R^3}\frac{1}{6}a^2\left(3R-2a\right)=\frac{a^2}{R^3}\left(3R-2a\right)=\frac{3a^2}{R^2}\left(1-\frac{2a}{3R}\right).$$

Ответ: $c=\frac{3}{\pi R^3}$; $\frac{3a^2}{R^2}\left(1-\frac{2a}{3R}\right)$.