

Тема: Формула Байеса (Ефимов, №18.251)

ЗАДАНИЕ. *Астрономический объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в одном из двух состояний: H_1 или H_2 . Априорные вероятности этих состояний $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,4$. Наблюдение ведется независимо двумя обсерваториями. Первая обсерватория обычно дает правильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта в 90% случаев, а в 10% ошибается; вторая дает правильные сведения в 80% случаев, а в 20% ошибается. Первая обсерватория сообщила, что объект находится в состоянии H_1 , а вторая – что в состоянии H_2 . Найти апостериорную вероятность состояния H_1 .*

РЕШЕНИЕ.

Событие A заключается в том, что первая обсерватория сообщила, что объект находится в состоянии H_1 , а вторая – что в состоянии H_2 .

Это событие может произойти в двух следующих случаях:

1) Объект находится в состоянии H_1 . Тогда первая обсерватория дала правильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта (это происходит в 90% случаев), а вторая ошиблась (это происходит в 20% случаев).

Эта вероятность равна $P(A/H_1) = 0,9 \cdot 0,2 = 0,18$.

2) Объект находится в состоянии H_2 . Тогда первая обсерватория дала неправильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта (это происходит в 10% случаев), а вторая дала правильные сведения (это происходит в 80% случаев).

Эта вероятность равна $P(A/H_2) = 0,1 \cdot 0,8 = 0,08$.

Следовательно, полная вероятность события A равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0,6 \cdot 0,18 + 0,4 \cdot 0,08 = 0,108 + 0,032 = 0,14.$$

Апостериорную вероятность состояния H_1 находим по формуле Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,18}{0,14} = \frac{108}{140} = \frac{27}{35} \approx 0,771.$$

ОТВЕТ: Апостериорная вероятность состояния объекта H_1 равна 0,771.