Закон распределения дискретной случайной величины

Пример решения

Задание. Два баскетболиста делают по три броска в корзину. Вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0,6, для второго – 0,7. Пусть X - разность между числом удачных бросков первого и второго баскетболистов. Найти ряд распределения, моду и функцию распределения случайной величины X. Построить многоугольник распределения и график функции распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Найти вероятность события $(-2 < X \le 1)$.

Решение. Пусть Z - число попаданий первым баскетболистом в корзину при трех бросках. Случайная величина Z распределена по биномиальному закону с параметрами $n=3$, $p=0,6$, поэтому вероятности можно вычислить по формуле Бернулли: $P(Z=k)=C_3^k\cdot 0,6^k\cdot 0,4^{3-k}$. Получаем:

$P(Z=0)=C_3^0\cdot 0,6^0\cdot 0,4^3=0,064$,

$P(Z=1)=C_3^1\cdot 0,6^1\cdot 0,4^2=0,288$,

$P(Z=2)=C_3^2\cdot 0,6^2\cdot 0,4^1=0,432$,

$P(Z=3)=C_3^3\cdot 0,6^3\cdot 0,4^0=0,216$.

Пусть Y - число попаданий вторым баскетболистом в корзину при трех бросках. Случайная величина Y распределена по биномиальному закону с параметрами $n=3$, $p=0,7$, поэтому вероятности можно вычислить по формуле Бернулли: $P(Y=k)=C_3^k\cdot 0,7^k\cdot 0,3^{3-k}$. Получаем:

$P(Y=0)=C_3^0\cdot 0,7^0\cdot 0,3^3=0,027$,

$P(Y=1)=C_3^1\cdot 0,7^1\cdot 0,3^2=0,189$,

$P(Y=2)=C_3^2\cdot 0,7^2\cdot 0,3^1=0,441$,

$P(Y=3)=C_3^3\cdot 0,7^3\cdot 0,3^0=0,343$.

Теперь вводим искомую случайную величину $X=Z-Y$ = (Разность между числом удачных бросков первого и второго баскетболистов). Составим закон распределения данной величины. Будем вести расчеты в таблице. Запишем все возможные комбинации исходов бросков:

Z	Y	X	p_z	p_y	$p_x=p_y p_z$
0	0	**0**	0,064	0,027	**0,001728**
1	0	**1**	0,288	0,027	**0,007776**
2	0	**2**	0,432	0,027	**0,011664**
3	0	**3**	0,216	0,027	**0,005832**
0	1	**-1**	0,064	0,189	**0,012096**
1	1	**0**	0,288	0,189	**0,054432**
2	1	**1**	0,432	0,189	**0,081648**
3	1	**2**	0,216	0,189	**0,040824**
0	2	**-2**	0,064	0,441	**0,028224**

1	2	**-1**	0,288	0,441	**0,127008**
2	2	**0**	0,432	0,441	**0,190512**
3	2	**1**	0,216	0,441	**0,095256**
0	3	**-3**	0,064	0,343	**0,021952**
1	3	**-2**	0,288	0,343	**0,098784**
2	3	**-1**	0,432	0,343	**0,148176**
3	3	**0**	0,216	0,343	**0,074088**

Теперь, используя третий и шестой столбец, записываем ряд распределения X, складывая вероятности для одинаковых значений. Получим:

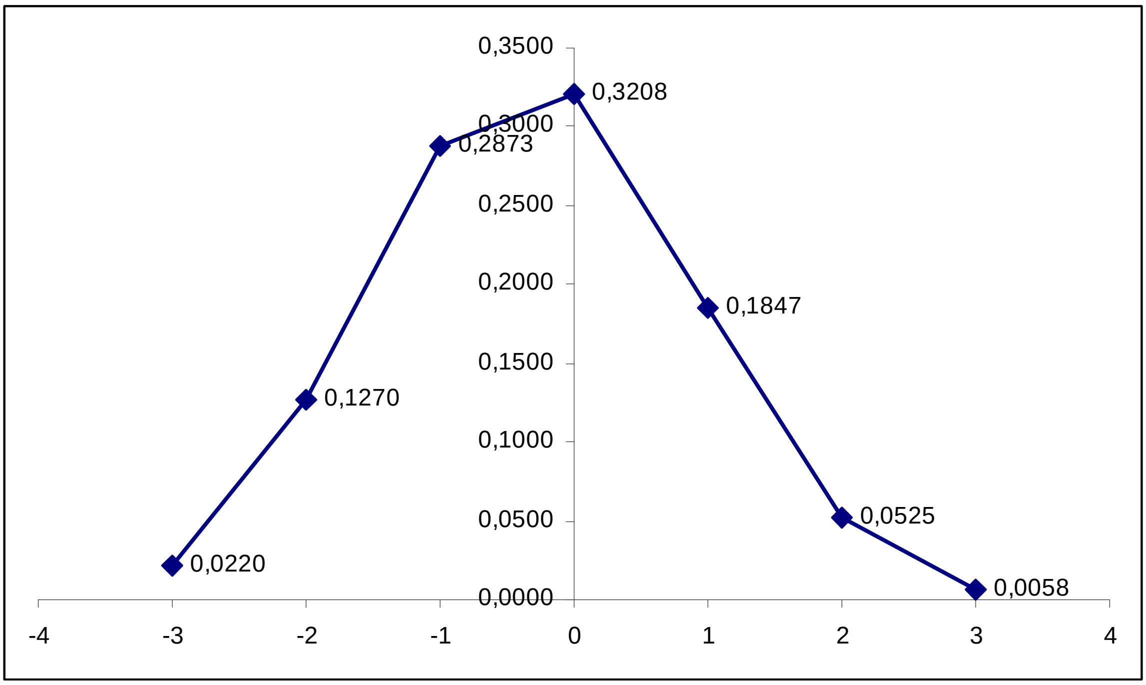
x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,0220	0,1270	0,2873	0,3208	0,1847	0,0525	0,0058

Мода равна 0 – наиболее вероятное значение в ряду.

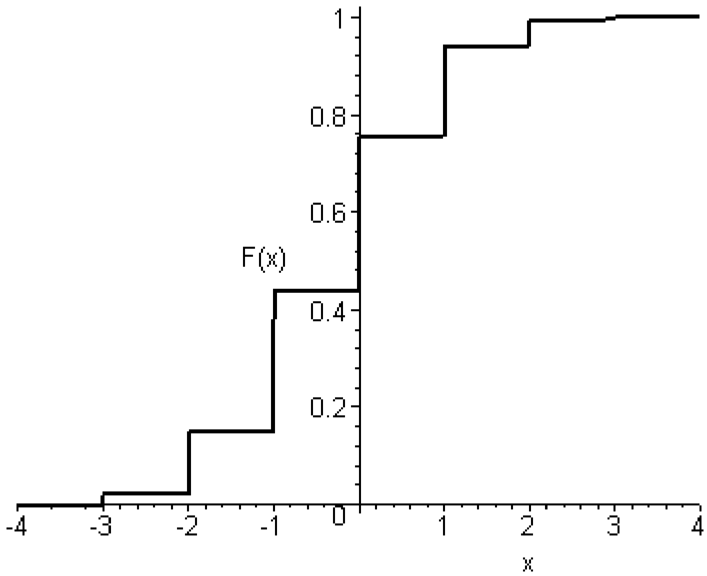
Найдем функцию распределения случайной величины X, $F(x)=P(X<x)$

x от	x до	$F(x)$
$-\infty$	-3	0
-3	-2	0,0220
-2	-1	0,1490
-1	0	0,4362
0	1	0,7570
1	2	0,9417
2	3	0,9942
3	$+\infty$	1,0000

Построим многоугольник распределения:



Построим график функции распределения.



Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Математическое ожидание:

$$MX = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = -0,3.$$

Дисперсия:

$$DX = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1,44 - (-0,3)^2 = 1,35.$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{1,35} \approx 1,162$.

Расчеты в таблице ниже:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	**Сумма**
p_i	0,0220	0,1270	0,2873	0,3208	0,1847	0,0525	0,0058	**1,0000**
$x_i p_i$	-0,0659	-0,2540	-0,2873	0,0000	0,1847	0,1050	0,0175	**-0,3000**
$x_i^2 p_i$	0,1976	0,5080	0,2873	0,0000	0,1847	0,2100	0,0525	**1,4400**

Найдем вероятность события $(-2 < X \le 1)$:

$$P(-2 < X \le 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2873 + 0,3208 + 0,1847 = 0,7927.$$