Производящая функция. Решение задачи

Задача. Найти производящую функцию моментов для случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить с помощью найденной функции математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Пусть X имеет закон распределения Пуассона $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Тогда производящая функция моментов равна

$$M_X(t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{tx_i}p_i=\sum_{i=0}^{\infty}e^{ti}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{ti}\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^i}{i!}=e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}=\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right).$$

Вычислим с помощью найденной функции математическое ожидание и дисперсию.
Для этого вычисляем первый и второй момент по формуле:

$$M\left[X^n\right]=\frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}.$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=\frac{d}{dt}\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)=\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)'=\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\lambda e^t.,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\lambda e^t\right)=\left(\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\right)'\lambda e^t+\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\left(\lambda e^t\right)'=$$

$$=\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\left(\lambda e^t\right)^2+\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\left(\lambda e^t\right)=\exp\left(\lambda\left(e^t-1\right)\right)\left(\lambda e^t\right)\left(\lambda e^t+1\right).$$

Далее:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0}=\exp\left(\lambda\left(e^0-1\right)\right)\lambda e^0=\exp(0)\lambda=\lambda.$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0}=\exp\left(\lambda\left(e^0-1\right)\right)\left(\lambda e^0\right)\left(\lambda e^0+1\right)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda.$$

Математическое ожидание: $M[X]=\frac{d}{dt}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}=\lambda$.

Дисперсия: $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=\frac{d^2}{dt^2}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}-(\lambda)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$