Закон больших чисел и теорема Чебышева

Пример решения задачи

Задача. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превышает 0,5, равна 0,8. Дисперсия каждой независимой случайной величины не превышает 7. Найти число таких случайных величин.

Решение. По условию имеем:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le 0,5\right)=0,8,\ D(X_i)\le 7=C,\ i=\overline{1,n}.$$

Используем неравенство из теоремы Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le \varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Так как по условию известно, что $D(X_i)\le 7=C$, $i=\overline{1,n}$, неравенство примет вид:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le \varepsilon\right)\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Подставляем:

$$1-\frac{7}{n\cdot 0,5^2}=0,8,$$

$$\frac{7}{n\cdot 0,5^2}=0,2,$$

$$\frac{1}{n}=\frac{0,5^2\cdot 0,2}{7},$$

$$n=\left(\frac{0,5^2\cdot 0,2}{7}\right)^{-1}=140.$$

Ответ: 140 случайных величин.