Решение задачи: непрерывная случайная величина

Задание. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

1) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения),
2) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
3) Моду M_o и медиану M_e,
4) $P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right)$.

Построить графики функции и плотности распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ x \le 0, \\ x^2, \ \textit{при} \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ \textit{при} \ x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения случайной величины X как производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ x \le 0, \\ 2x, \ \textit{при} \ 0 < x \le 1, \\ 0, \ \textit{при} \ x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left(\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^2 dx - (M(X))^2 = \int_0^1 2x^3 dx - \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0,236$$

Моду $M_o = 1$ (максимум плотности распределения).

Найдем медиану M_e из условия

$F(M_e)=\dfrac{1}{2},$

$(M_e)^2=\dfrac{1}{2},$

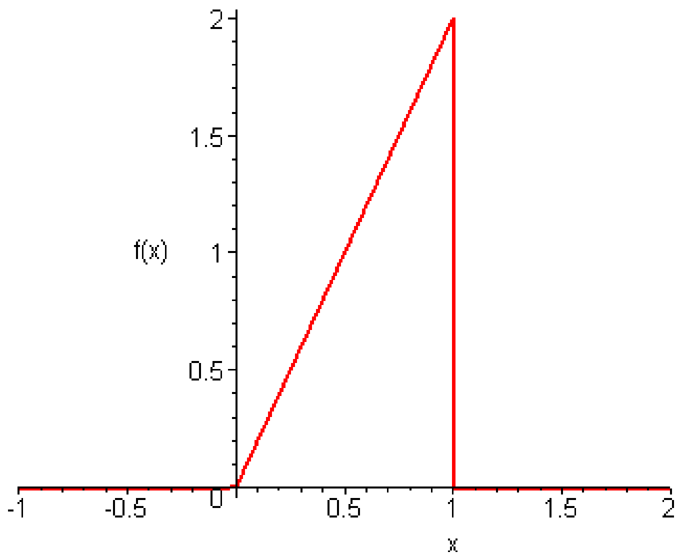
$M_e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Найдем вероятность $P\left(\dfrac{1}{2}<X<2\right)$ по известной формуле:

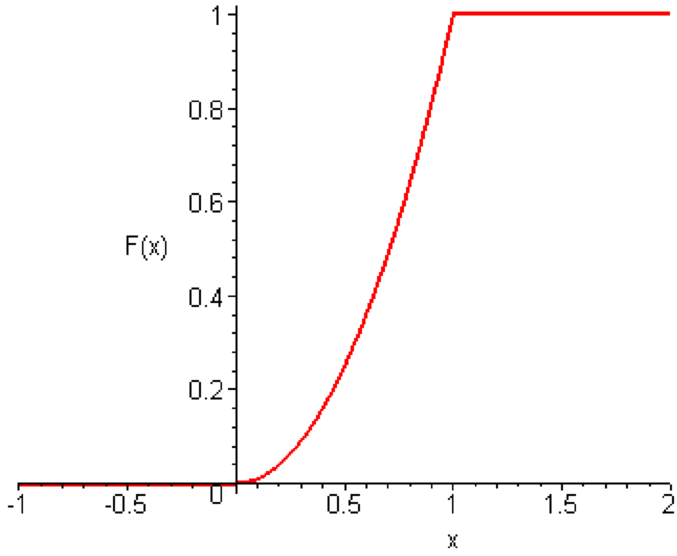
$$P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-0,25=0,75.$$

Построить графики функции и плотности распределения.

Плотность распределения $f(x)$



Функция распределения $F(x)$


F(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x