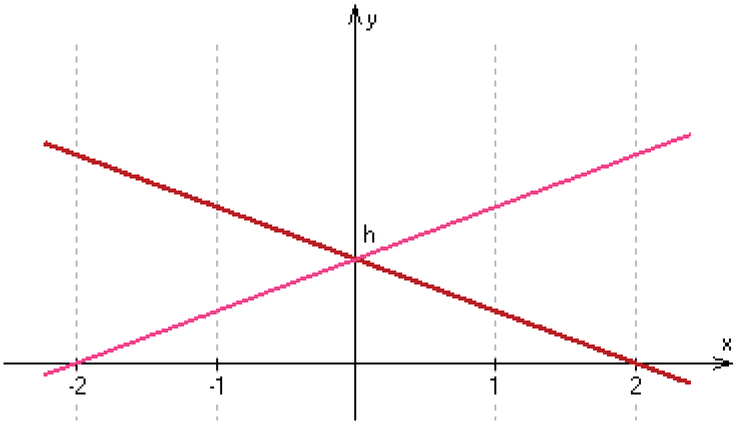
Решение задачи: непрерывная случайная величина
Закон Симпсона (равномерного треугольника)

Задание. Случайная величина Х подчинена закону Симпсона (закону равнобедренного треугольника) на участке от -а до +а.

а) Написать выражение для плотности распределения.
б) Построить график функции распределения.
в) Определить числовые характеристики случайной величины Х.

Решение. Сделаем схематический чертеж плотности распределения величины X при $a=2$ (для определенности).



Чтобы выписать закон распределения X, необходимо найти высоту данного равнобедренного треугольника из условия, что площадь треугольника равна 1: $S=\frac{1}{2}(a+a)h=ah=1,\ h=\frac{1}{a}$.

Получаем плотность распределения X:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le -a, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}x,\ -a<x\le 0, \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}x,\ 0<x\le a, \\ 0,\ x>a. \end{cases}$$

Или

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le -a, \\ \frac{1}{a^2}(a-|x|),\ -a<x\le a, \\ 0,\ x>a. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Получаем:

Пусть $x<-a$, тогда $f(x)=0$, тогда $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$.

Пусть $-a \le x < 0$, тогда $f(x)=\frac{1}{a^2}(a+x)$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-a} 0dt+\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{x}(a+t)\,dt=\frac{1}{2a^2}(t+a)^2\Big|_{-a}^{x}=\frac{1}{2a^2}(x+a)^2.$$

Пусть $0 < x \le a$, тогда $f(x)=\frac{1}{a^2}(a-x)$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-a} 0dt+\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{0}(t+a)\,dt+\frac{1}{a^2}\int_{0}^{x}(a-t)dt=\frac{1}{2a^2}(t+a)^2\Big|_{-a}^{0}-\frac{1}{2a^2}(a-t)^2\Big|_{0}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2a^2}a^2-0-\frac{1}{2a^2}(a-x)^2+\frac{1}{2a^2}a^2=1-\frac{1}{2a^2}(a-x)^2.$$

Пусть $x > a$, тогда $f(x)=0$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-a} 0dt+\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{0}(t+a)\,dt+\frac{1}{a^2}\int_{0}^{a}(a-t)dt+\int_{a}^{x}0dt=\frac{1}{2a^2}(t+a)^2\Big|_{-a}^{0}-\frac{1}{2a^2}(a-t)^2\Big|_{0}^{a}=$$

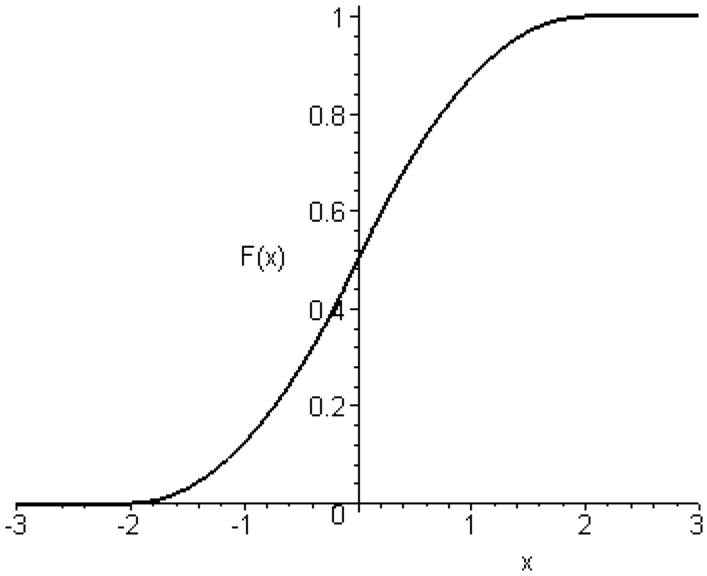
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x \le -a,\\ \frac{1}{2a^2}(x+a)^2, \ -a < x \le 0,\\ 1-\frac{1}{2a^2}(a-x)^2, \ 0 < x \le a,\\ 1, \ x > a.\end{cases}$$

Построим график функции распределения. Для определенности положим $a=2$.

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x \le -2,\\ \frac{1}{8}(x+2)^2, \ -2 < x \le 0,\\ 1-\frac{1}{8}(2-x)^2, \ 0 < x \le 2,\\ 1, \ x > 2.\end{cases}$$



Определим числовые характеристики случайной величины X.

Найдем математическое ожидание

$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx = 0,$ как интеграл от нечетной функции $xf(x) = x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}|x|\right)$ по симметричному интервалу.

Найдем дисперсию:

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx - (MX)^2 = \frac{1}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a-|x|)x^2dx = \frac{2}{a^2}\int\limits_{0}^{a}(a-|x|)x^2dx = \frac{2}{a^2}\int\limits_{0}^{a}\left(ax^2 - x^3\right)dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4\right) = \frac{1}{6}a^2.$$