

Примеры решений на нормальный закон распределения

Задача. Требуется найти вероятности того, что нормально распределённая случайная величина $X \in N(a; \sigma)$, где a - математическое ожидание, σ - среднее квадратичное отклонение случайной величины X , принимает значения:

а) в интервале (α, β) ;

б) меньшее α ;

в) большее β ;

г) отличающееся от своего математического ожидания по абсолютной величине не больше чем на $k\%$:

$$X \in N(4; 5), \quad \alpha = 2, \quad \beta = 8, \quad k = 10$$

Решение.

Используем формулу для нахождения вероятности попадания нормальной случайной

величины в интервал: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ -

нормированная функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

а) нормально распределённая случайная величина X принимает значение в интервале (α, β) .

Получаем:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 8) &= \Phi\left(\frac{8-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{5}\right) = \Phi(0,8) - \Phi(-0,4) = \\ &= \Phi(0,8) + \Phi(0,4) = 0,2881 + 0,1554 = 0,4435. \end{aligned}$$

б) нормально распределённая случайная величина X принимает значение, меньшее α .

$$\begin{aligned} P(-\infty < X < 2) &= \Phi\left(\frac{2-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-4}{5}\right) = \Phi(-0,4) - \Phi(-\infty) = \\ &= -\Phi(0,4) + \Phi(\infty) = -0,1554 + 0,5 = 0,3446. \end{aligned}$$

в) нормально распределённая случайная величина X принимает значение, большее β .

$$P(8 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{8 - 4}{5}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(0,8) = \\ = 0,5 - 0,2881 = 0,2119.$$

Проверка: $0,4435 + 0,3446 + 0,2119 = 1$. Верно.

г) нормально распределённая случайная величина X принимает значения, отличающиеся от своего математического ожидания по абсолютной величине не больше чем на $k\%$.

Используем формулу: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $\delta = 10\% \hat{=} a = 4$, то есть $\delta = 0,4$.

Получим:

$$P(|X - 4| < 0,4) = 2\Phi\left(\frac{0,4}{5}\right) = 2\Phi(0,08) = 2 \cdot 0,0319 = 0,0638.$$

Ответ: а) 0,4435, б) 0,3446, в) 0,2119, г) 0,0638.