Равномерный закон распределения: задача с решением

Задача. Дана плотность распределения $p(x)$ случайной величины ξ. Найти параметр γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, функцию распределения случайной величины ξ, вероятность выполнения неравенства $x_1 < \xi < x_2$.

$a = 1$, $b = 1,8$, $x_1 = 1,3$, $x_2 = 1,6$

$$p(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b], \\ 0, & x \notin [\gamma, b]. \end{cases} \text{, получаем } p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\gamma, 1,8], \\ 0, & x \notin [\gamma, 1,8]. \end{cases}$$

Решение. Найдем параметр γ из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int\limits_{\gamma}^{1,8} 1dx = (x)\Big|_{\gamma}^{1,8} = 1,8 - \gamma = 1 \text{, откуда } \gamma = 0,8 .$$

Получаем:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,8,\ 1,8], \\ 0, & x \notin [0,8,\ 1,8]. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)xdx = \int\limits_{0,8}^{1,8} xdx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{0,8}^{1,8} = \frac{1}{2}\left(1,8^2 - 0,8^2\right) = 1,3.$$

Найдем дисперсию

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)xdx - (M\xi)^2 = \int\limits_{0,8}^{1,8} x^2dx - 1,3^2 = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0,8}^{1,8} - 1,3^2 = \frac{1}{3}\left(1,8^3 - 0,8^3\right) - 1,3^2 \approx 0,083.$$

Найдем функцию распределения случайной величины ξ по определению $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

Получаем:

Пусть $x < 0,8$, тогда $p(x) = 0$, тогда $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Пусть $0,8 \le x < 1,8$, тогда $p(x) = 1$, тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0,8} 0dt + \int\limits_{0,8}^{x} 1dt = t\Big|_{0,8}^{x} = x - 0,8 .$$

Пусть $x \ge 1,8$, тогда $p(x) = 0$, тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0,8} 0dt + \int\limits_{0,8}^{1,8} 1dt + \int\limits_{1,8}^{x} 0dt = t\Big|_{0,8}^{1,8} = 1,8 - 0,8 = 1 .$$

Получили:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x<0,8, \\ x-0,8, \ 0,8 \le x<1,8, \\ 1, \ x \ge 1,8.\end{cases}$$

Вероятность выполнения неравенства:

$$P(1,3<\xi<1,6)=\int_{1,3}^{1,6} p(x)dx=\int_{1,3}^{1,6} 1dx=\left(x\right)\Big|_{1,3}^{1,6}=1,6-1,3=0,3.$$