Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Равномерное распределение: задача с решением

Задача. Функция распределения непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0. & x\in(-\infty,a)\\ \dfrac{x-1}{2}, & x\in[a,b]\\ 1, & x\in(b,+\infty)\end{cases}$$

Определить параметры a и b, найти плотность вероятности, числовые характеристики и вероятность попадания случайной величины в интервал [-1, 2]. Построить графики p(x) и F(x).

Решение. Найдем параметры a,b из свойств функции распределения:

$$\begin{cases}F(a)=\dfrac{a-1}{2}=0,\\ F(b)=\dfrac{b-1}{2}=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-1=0,\\ b-1=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=1,\\ b=3;\end{cases}$$

Получаем, что

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \ 1<x\le 3,\\ 1, \ x>3.\end{cases}$$

Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}, \ 1<x\le 3,\\ 0, \ x>3.\end{cases}$$

Таким образом, величина X распределена по равномерному закону распределения на интервале $(a,b)=(1,3)$.

Найдем математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{4}\left(3^2-1^2\right)=2.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-\left(M(X)\right)^2=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}x^2dx-4=\left(\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_1^3-4=\frac{1}{6}(27-1)-4=\frac{1}{3}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1/3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал [-1, 2].

$$P(-1<X\le 2)=F(2)-F(-1)=\frac{1}{2}(2-1)-0=\frac{1}{2}=0,5$$

Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике