Задача по уравнению с математической физики с решением

Задание.

Определить тип уравнений. Привести к каноническому виду.
$u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0$.

Решение.

Вычисляем дискриминант:
$D=2^2-1=3>0$, уравнение гиперболического типа.

Записываем:

$$(dy)^2-4dxdy+(dx)^2=0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}+1=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=2\pm\sqrt{3}.$$

Обозначим $a=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}$, тогда решение

$$\begin{cases} y-ax=c_1, \\ y-bx=c_2. \end{cases}$$

Делаем замену:

$$\begin{cases} \xi=y-ax, \\ \eta=y-bx; \end{cases}$$

Тогда обратная замена:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\xi-\eta}{b-a}, \\ y=\dfrac{b\xi-a\eta}{b-a}. \end{cases}$$

Вычисляем производные:

$$\xi_x=-a,\ \xi_y=1,$$

$$\eta_x=-b,\ \eta_y=1.$$

$$u_x=-au_\xi-bu_\eta,$$

$$u_y=u_\xi+u_\eta,$$

$$u_{xx}=a^2u_{\xi\xi}+b^2u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}ab,$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta},$$

$$u_{xy}=-au_{\xi\xi}-bu_{\eta\eta}+u_{\xi\eta}(-a-b).$$

Подставляем все в исходное уравнение $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0$:

$$\left(a^2u_{\xi\xi}+b^2u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}ab\right)+4\left(-au_{\xi\xi}-bu_{\eta\eta}+u_{\xi\eta}\left(-a-b\right)\right)+$$

$$+\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}\right)+\left(-au_{\xi}-bu_{\eta}\right)+\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)-\left(\frac{\xi-\eta}{b-a}\right)^2\left(\frac{b\xi-a\eta}{b-a}\right)=0.$$

Подставляем $a=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}$, учитывая, что
$a^2=7+4\sqrt{3},\ b^2=7-4\sqrt{3},\ ab=1,\ a+b=4,\ b-a=-2\sqrt{3}$.
Получаем:

$$u_{\xi\xi}\left(7+4\sqrt{3}+1-8-4\sqrt{3}\right)+u_{\eta\eta}\left(7-4\sqrt{3}+1-8+4\sqrt{3}\right)+u_{\xi\eta}\left(2+2-16\right)+\widetilde{F}=0,$$

$$-12u_{\xi\eta}+\widetilde{F}=0.$$

Получили уравнение гиперболического типа в каноническом виде. За $\widetilde{F}$ обозначены все слагаемые порядка меньше 2:

$\widetilde{F}=\left(-au_{\xi}-bu_{\eta}\right)+\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)-\left(\frac{\xi-\eta}{b-a}\right)^2\left(\frac{b\xi-a\eta}{b-a}\right)$, где $a=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}$.