# Дифференциальное уравнение в частных производных с решением

Задание.

*Решить уравнение методом Лагранжа-Шарпи.*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = z^4\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4.$$

Решение.

Обозначим

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Тогда

$$F(p,q,z)=z^4p^4-q^3=0.$$

Запишем, согласно методу Лагранжа-Шарпи, систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{F'_p}=\frac{dy}{F'_q}=\frac{dz}{F'_p p+F'_q q}=-\frac{dp}{F'_x+F'_z p}=-\frac{dq}{F'_y+F'_z q}.$$

Подставляя $F$, получим:

$$\frac{dx}{4z^4p^3}=\frac{dy}{-3q^2}=\frac{dz}{p\left(4z^4p^3\right)+q\left(-3q^2\right)}=-\frac{dp}{4z^3p^5}=-\frac{dq}{4z^3p^4q}.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\frac{dp}{4z^3p^5}=\frac{dq}{4z^3p^4q},$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q},$$

$$\ln p=\ln q+\ln a,$$

$$p=aq.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$z^4a^4q^4-q^3=0.$$

Выражаем отсюда $q$:

$$q=\frac{1}{z^4a^4}.$$

Подставляя в уравнение Пфаффа, получим:

$$dz=pdx+qdy=a\frac{1}{z^4a^4}dx+\frac{1}{z^4a^4}dy,$$

$$z^4dz=\frac{1}{a^3}dx+\frac{1}{a^4}dy.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\frac{1}{5}z^5 = \frac{1}{a^3}x + \frac{1}{a^4}y + b,$$

$$z = \sqrt[5]{5\frac{ax + y + ba^4}{a^4}}.$$

**Ответ**: $z = \sqrt[5]{5\frac{ax + y + ba^4}{a^4}}.$