Пример с решением
Дифференциальное уравнение в частных производных

ЗАДАНИЕ.

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:
$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0$

РЕШЕНИЕ.

Общий вид уравнения:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

В данном случае:

$$a_{11} = 1;\ \ a_{12} = -1; a_{22} = 1$$

Определим тип уравнения.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 1 \cdot 1 = 0$$

Уравнение параболического типа.
Найдем общий интеграл уравнения характеристик:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0$$

$$(dy)^2 + 2dydx + (dx)^2 = 0$$

$$(dy + dx)^2 = 0$$

$$dy + dx = 0$$

$$dy = -dx$$

Общий интеграл:

$$h_1(x, y) = x + y$$

В качестве $h_2(x, y)$ возьмем любую дважды дифференцируемую функцию, которую нельзя выразить через $h_1(x, y)$. Пусть $h_2(x, y) = y$
Сделаем замену:

$$\xi = h_1(x, y) = x + y;\ \ \eta = h_2(x, y) = y$$

При этом по правилу дифференцирования сложной функции:

$$u_x = u_\xi;\ \ u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi};\ \ u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta};\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Получим:

$$u_{\xi\xi} - 2(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi - 2(u_\xi + u_\eta) = 0$$

$$u_{\eta\eta} - 2u_\eta = 0$$

Получили канонический вид заданного уравнения.
Запишем характеристическое уравнение, решим его:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0;\ \ \lambda_2 = 2$$

Общее решение уравнения $u_{\eta\eta} - 2u_\eta = 0$:

$$u = C_1(\xi)e^{0\eta} + C_2(\xi)e^{2\eta} = C_1 + C_2e^{2\eta}$$

C_1, C_2 - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Вернемся к замене:

$$\xi = x + y;\ \ \eta = y$$

$$u = C_1(x + y) + C_2(x + y)e^{2y}$$