Задача с решением по уравнению с математической физики
Смешанная задача для волнового уравнения

ЗАДАНИЕ.

Решить смешанную задачу для волнового уравнения (N -номер варианта):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < +\infty; \quad u(x,0) = x(x-l), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

N			**3**									
a			**3**									
l			**0,5**									

РЕШЕНИЕ.

Будем искать нетривиальные частные решения исходного уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, в виде произведения двух функций, зависящих только от одного аргумента X=X(x) и T=T(t), а именно

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Вычислив производные u_{tt} è u_{xx} и подставив их в исходное уравнение, получим

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Это равенство выполняется только в том случае, если обе части его не зависят ни от x, ни от t, т.е. представляют собой одну и ту же постоянную, которую обозначим за $-\lambda = const$, т.е.

$$\frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два обыкновенных однородных линейных уравнений второго порядка

$$T''(t) + 9\lambda T(t) = 0$$

и

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Для того, чтобы получить не равные нулю решения, удовлетворяющие граничным условиям, необходимо найти нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям $X(0) = 0,\ X(0.5) = 0$. Это задача Штурма-Лиувилля. Решая эту задачу определяем, что $\lambda > 0$. Его общее решение запишется в виде:

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right), \qquad x \in [0,0.5],$$

где коэффициенты A и B находятся из краевых условий:

$$y(0) = A = 0$$

и

$$y(1) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = B\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0.$$

Следовательно, $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, откуда

$$\sqrt{\lambda} = \pi k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому собственные числа в задаче Штурма-Лиувилля имеют вид: $\lambda = \pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}$, а собственные функции имеют вид:

$$X_k(x) = \sin(\pi k x).$$

Теперь для всех $k \in \mathbb{N}$ выпишем общий вид решения уравнения:

$$T_k''(t) + 9\pi^2 k^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_k(t) = A_k \sin(3\pi k t) + B_k \cos(3\pi k t).$$

Пусть $U_k(x,t) = X_k(x) T_k(t)$, тогда решение начального уравнения в частных производных имеет вид:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_k(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t),$$

причем из краевых условий получим:

$$U(x,0)=u(x,0)=x(x-0.5) \text{ и } U_t(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

Из краевых условий находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) T_k(0)=\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)(B_k)=x(x-0.5)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) T_k'(0)=3\pi\sum_{n=1}^{\infty} kX_k(x)(A_k)=0.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $\mathrm{A_k}$ и $\mathrm{B_k}$, разложим в ряд Фурье по функциям $\mathrm{X_k(x)}$ функцию $x(x-0.5)$:

$$x(x-0.5)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x),$$

где

$$a_k=2\int_0^1 x(x-0.5)\sin(\pi kx)\,dx=-\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-4)+4}{\pi^3k^3}.$$

Из второго уравнения следует, что

$b_k=0$.

Отсюда получаем:

$A_k=0$,

$$B_k=a_k=-\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-4)+4}{\pi^3k^3}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения запишется в виде:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\left(\frac{(-1)^k(4-\pi^2k^2)-4}{\pi^3k^3}\cos(3\pi kt)\right).$$

Ответ: $U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\left(\frac{(-1)^k(4-\pi^2k^2)-4}{\pi^3k^3}\cos(3\pi kt)\right)$.