Вариационное исчисление: решение задачи Больца

ЗАДАНИЕ. *Решить задачу Больца*

$$8.\quad \int_0^1 \dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(1) \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Отметим, что в нашем случае

$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2$, $\psi(x(0), x(1)) = \alpha x^2(1)$.

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{f}_{\dot{x}} + \hat{f}_x = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}2\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = const.$$

б) условия трансверсальности:

$$\hat{f}_{\dot{x}}(0) = \hat{\psi}_{x(0)} \Leftrightarrow \dot{x}(0) = 0;$$
$$\hat{f}_{\dot{x}}(1) = -\hat{\psi}_{x(1)} \Leftrightarrow 2\dot{x}(1) = -2\alpha x(1) \Leftrightarrow \dot{x}(1) + \alpha x(1) = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера:

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий трансверсальности и начального условия находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\alpha = 0$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = 1$.

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(t) \in C^1[0,1]$, то $\hat{x}(t) + h(t)$ - произвольная допустимая точка в задаче Больца и

$$\mathrm{B}(\hat{x}(t) + h(t)) - \mathrm{B}(\hat{x}(t)) = \int_0^1 (\dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}(t))^2\,dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}(t))^2\,dt = \int_0^1 (0 + \dot{h}(t))^2\,dt - \int_0^1 0^2\,dt = \int_0^1 (\dot{h}(t))^2\,dt \ge 0$$

при любом выборе функции $h(t)$. Следовательно, $\hat{x}(t)=1$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\hat{x}(t)=1 \in abs\min$.