Задача с решением по вариационному исчислению
скачана с https://www.matburo.ru/ex_dr_all.php?p1=vi
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Вариационное исчисление: решение задачи на поиск экстремалей

ЗАДАНИЕ. *Найти все экстремали функционала* $J(y)$, *удовлетворяющие указанным граничным условиям:*

$$J(y)=\int_0^1 (e^y + xy')dx;\ y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

РЕШЕНИЕ. Для того чтобы функционал

$$V[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx,$$

определенный на множестве функций y = y(x), имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,$ достигал на данной функции y(x) экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера [1, с.13]

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$F_{y'y'}\cdot y''+F_{yy'}\cdot y'+F_{xy'}-F_y=0.$$

В нашем случае $F(x,y,y')=e^y+xy'$.

Найдем частные производные функции $F(x,y,y')=e^y+xy'$.

$$F_y(x,y,y')=\left(e^y+xy'\right)_y=e^y.$$

$$F_{yy'}(x,y,y')=0.$$

$$F_{y'}(x,y,y')=x.$$

$$F_{y'y'}(x,y,y')=0.$$

$$F_x(x,y,y')=y'.$$

Задача с решением по вариационному исчислению
скачана с https://www.matburo.ru/ex_dr_all.php?p1=vi
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$F_{xy'}(x, y, y') = 1.$$

Подставим найденные выражения в уравнение Эйлера.

$$0 \cdot y'' + 0 \cdot y' + 1 - e^{y} = 0;$$

$$e^{y} = 1;$$

Граничное условие $y(0) = 0$ выполняется. Действительно,

$$e^{y(0)} = e^{0} = 1.$$

При x = 1 $y(1) = 1$. Тогда $e^{y(1)} = e^{1} = e$ Второе условие не выполняется. Следовательно, при указанных граничных условиях вариационная задача не имеет решения.

Ответ: задача не имеет решения.