Контрольная по алгебре с решением

Линейная алгебра

1-10. Каждый вариант этого раздела содержит четыре пункта, задания к которым соответствуют номеру пункта.

Вариант 2

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 & -7 \\ 1 & 1 & -13 & -6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

1. Вычислить определитель 4-го порядка двумя способами:

а) разложить по какой-либо строке или столбцу;

б) преобразовать определитель, получив нули в какой-либо строке или столбце, используя свойства определителя, а затем разложить его по этой строке или столбцу.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

А) Разложим по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-1&2&1&-1\\5&-1&2&1\\1&3&-1&-2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&1&-1\\5&2&1\\1&-1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&2&-1\\5&-1&1\\1&3&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1&2&1\\5&-1&2\\1&3&-1\end{vmatrix}=$$

$$=3\left[2\begin{vmatrix}2&1\\-1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&1\\3&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&2\\3&-1\end{vmatrix}\right]-$$

$$-1\left[-1\begin{vmatrix}2&1\\-1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}5&1\\1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}5&2\\1&-1\end{vmatrix}\right]-$$

$$-1\left[-1\begin{vmatrix}-1&1\\3&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5&1\\1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}5&-1\\1&3\end{vmatrix}\right]-$$

$$-2\left[-1\begin{vmatrix}-1&2\\3&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5&2\\1&-1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}5&-1\\1&3\end{vmatrix}\right]=$$

$$=3\left[2(-4+1)-1(2-3)-1(1-6)\right]+\left[(-4+1)+(-10-1)+(-5-2)\right]-$$
$$-\left[-(2-3)-2(-10-1)-(15+1)\right]-2\left[-(1-6)-2(-5-2)+(15+1)\right]=-98.$$

Б) Преобразуем определитель, получив нули в первом столбце, используя свойства определителя, а затем разложим его по этому столбцу.

Вычитаем из первой строки последнюю, умноженную на 3.

Прибавим к второй строке последнюю.

Вычитаем из третьей строки последнюю, умноженную на 5.

Получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-1&2&1&-1\\5&-1&2&1\\1&3&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-8&2&8\\0&5&0&-3\\0&-16&7&11\\1&3&-1&-2\end{vmatrix}=$$

Разложим по первому столбцу:

$$=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 7 & 11 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 7 & 11 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -16 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=5(22-56)-3(-56+32)=-98.$$

Результаты совпали.

Ответ: -98.

2. Записать систему линейных алгебраических уравнений *AX=B* и решить ее

тремя способами:

а) с помощью обратной матрицы *X=A-1·B*, предварительно вычислив *A-1*. Сделать две проверки:

1) *A-1·A=E;*

2) подставить полученную матрицу-столбец X в исходное уравнение и

убедиться, что *A·X=B;*

б) по правилу Крамера;

в) методом Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-2. \end{cases}$$

а) Решим систему с помощью обратной матрицы $X=A^{-1}\cdot B$, предварительно вычислив A^{-1}.

Найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Определитель матрицы:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=$$
$$=2(4-4)-5(6-3)+3(12-6)=-15+18=3\neq 0.$$

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 7 & -11 \end{pmatrix}^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot 2-1\cdot(-2) \\ -3\cdot 1-5\cdot 2+7\cdot(-2) \\ 6\cdot 1+7\cdot 2-11\cdot(-2) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+2 \\ -3-10-14 \\ 6+14+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Сделаем две проверки:

1) $A^{-1}\cdot A=E;$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0+6-3 & 0+4-4 & 0+2-2 \\ -6-15+21 & -15-10+28 & -9-5+14 \\ 12+21-33 & 30+14-44 & 18+7-22 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Верно.

2) подставим полученную матрицу-столбец X в исходное уравнение и

убедимся, что $A\cdot X=B;$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+5\cdot(-9)+3\cdot 14 \\ 3\cdot 2+2\cdot(-9)+1\cdot 14 \\ 3\cdot 2+4\cdot(-9)+2\cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = B.$$

Верно.

б) Решим систему по правилу Крамера;

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&1\\3&4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Вычислим дополнительные определители, подставляя столбец свободных членов, соответственно, на место первого, второго и третьего столбца основного определителя:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&2&1\\-2&4&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&2\\-2&4\end{vmatrix}=$$
$$=1(4-4)-5(4+2)+3(8+4)=6.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&1\\3&-2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3&1\\3&2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&2\\3&-2\end{vmatrix}=$$
$$=2(4+2)-1(6-3)+3(-6-6)=12-3-36=-27.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&5&1\\3&2&2\\3&4&-2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\4&-2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&2\\3&-2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}=$$
$$=2(-4-8)-5(-6-6)+1(12-6)=-24+60+6=42.$$

Тогда решение по формулам Крамера равно:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{3}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-27}{3}=-9,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{42}{3}=14.$$

Получили решение: $x_1=2,\ x_2=-9,\ x_3=14$.

в) Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-2. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе, умноженное на 3.

Вычитаем из третьего уравнения второе, умноженное на 2.

$$\begin{cases} -7x_1-x_2=-5, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ -3x_1=-6. \end{cases}$$

Находим из последнего уравнения $x_1=2$ и подставляем в остальные:

$$\begin{cases} -14-x_2=-5, \\ 6+2x_2+x_3=2, \\ x_1=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=-9, \\ 6-18+x_3=2, \\ x_1=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=-9, \\ x_3=14, \\ x_1=2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-9,\ x_3=14$.

3. Исследовать на совместимость и найти общее и какое-либо частное решение системы линейных алгебраических уравнений *AX=B*. Сделать проверку по всем уравнениям, подставив частное решение в каждое уравнение системы.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и будем упрощать с помощью элементарных преобразований.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Вычитаем из первой строки третью, умноженную на 6. Прибавляем к второй строке третью, умноженную на 2. Получим:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -21 & -16 & -14 \\ 0 & -2 & 7 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)\sim$$

Поделим первую строку на (-1).

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 21 & 16 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)\sim$$

Вычитаем из третьей строки первую. Прибавим к второй строке первую, умноженную на 2.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 21 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & 49 & 35 & 35 \\ 1 & 0 & -18 & -13 & -11 \end{array}\right)\sim$$

Поделим вторую строку на 49.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 21 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 1 & 0 & -18 & -13 & -11 \end{array}\right) \sim$$

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 21. Прибавим к третьей строке вторую, умноженную 18.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 1 & 0 & 0 & -1/7 & 13/7 \end{array}\right).$$

Пришли к системе:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{7}x_4 = \dfrac{13}{7}, \\ x_2 + x_4 = -1, \\ x_3 + \dfrac{5}{7}x_4 = \dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

Это совместная система. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} + \dfrac{1}{7}x_4, \\ x_2 = -1 - x_4, \\ x_3 = \dfrac{5}{7} - \dfrac{5}{7}x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

Найдем какое-либо частное решение. Положим, например, $x_4 = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} 6\cdot 2+5\cdot(-2)-3\cdot 0+2\cdot 1=12-10+2=4, \\ -2\cdot 2-4\cdot(-2)+1\cdot 0-3\cdot 1=-4+8-3=1, \\ 1\cdot 2+1\cdot(-2)+3\cdot 0+3\cdot 1=2-2+3=3. \end{cases}$$

Верно.

4. Найти нетривиальные решения однородной системы линейных алгебраических уравнений *AX=0*, если они существуют. Сделать проверку по всем уравнениям.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 & -7 \\ 1 & 1 & -13 & -6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем решения, преобразовывая матрицу системы.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 & -7 \\ 1 & 1 & -13 & -6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычитаем из первой строки третью, умноженную на 3. Вычитаем из второй строки третью. Получим:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 & -7 \\ 1 & 1 & -13 & -6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -24 & -10 \\ 0 & -3 & -18 & -7 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Поделим первую строку на (-2), вторую на (-1):

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 3 & 18 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\sim$$

Вычтем из второй строки первую:

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\sim$$

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 2.

Вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 4.

Получим:

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -19 & -7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -19 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пришли к системе:

$$\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_1 - 19x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 19x_3, \\ x_2 = -6x_3, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Сделаем проверку. Подставляем общее решение в исходную систему:

$$\begin{cases} 3\cdot 19x_3+8\cdot(-6x_3)-9\cdot x_3-7\cdot 0=(57-48-9)x_3=0,\\ 1\cdot 19x_3+1\cdot(-6x_3)-13\cdot x_3-6\cdot 0=(19-6-13)x_3=0,\\ 1\cdot 19x_3+4\cdot(-6x_3)+5\cdot x_3+1\cdot 0=(19-24+5)x_3=0. \end{cases}$$

Верно.

5. Найти матрицу, обратную матрице A. Сделать проверку.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Сначала вычислим определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\left(-2\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)+1\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=-(-2+1)=1\neq 0.$$

Найдем транспонированную матрицу алгебраических дополнений $\tilde{A}^T$. Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \ ,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +2-1=1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -2+1=-1,$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=-\left(-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\right)=1,$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&0&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\0&2&-1\end{vmatrix}=-\left(-\begin{vmatrix}2&-1\\2&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}\right)=1,$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&0\\0&2&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=2.$$

Получаем

$$\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&1&1\\0&-1&0&1\\-2&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T = \widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. Вычислим произведение $A^{-1} \cdot A$:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+0-1 & 2+1-2-1 & 1+0+0-1 & -1+0+1+0 \\ -1+0+0+1 & -2+0+2+1 & -1+0+0+1 & 1+0-1+0 \\ 0-1+0+1 & 0-1+0+1 & 0+0+0+1 & 0+0+0+0 \\ -2+0+0+2 & -4+0+2+2 & -2+0+0+2 & 2+0-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

6. Найти ранг, базис системы векторов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и координаты векторов данной системы в найденном базисе.

$a_1 = (1, -1, 0, 2)$,

$a_2 = (-1, 1, 1, 0)$,

$a_3 = (0, 0, 1, -1)$,

$a_4 = (2, -2, -1, 2)$,

$a_5 = (-2, 2, 1, 1)$,

$a_6 = (0, 0, -2, 2)$.

Решение. Запишем матрицу из векторов и будем с ней работать (преобразовывать), чтобы найти ранг этой системы векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Прибавим к второй строке первую. Вычтем из четвертой строки первую, умноженную на 2. Прибавим к пятой строке первую, умноженную на 2. Получаем:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Вычтем из третьей строки вторую. Прибавим к четвертой строке вторую. Вычтем из пятой строки вторую. Прибавим к шестой строке вторую, умноженную на 2. Получим:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

Поделим третью строку на (-3), пятую на 3, шестую на 6.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim$$

Вычтем из первой и второй строки третью, умноженную на 2. Вычтем из пятой и шестой строки третью.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

Получаем, что ранг данной матрицы равен трем (см. единичные вектора в 1, 3 и 4 столбце).

Таким образом, из шести векторов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ линейно независимыми являются только три, их можно выбрать в качестве базиса данной системы векторов.

Выберем в качестве базиса системы первые три вектора $\{a_1, a_2, a_3\}$ и разложим по ним остальные три вектора системы: a_4, a_5, a_6.

1. Разложим $a_4 = (2, -2, -1, 2)$

Пусть $a_4 = xa_1 + ya_2 + za_3$, получаем систему:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ -x+y=-2, \\ y+z=-1, \\ 2x-z=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2+y, \\ y+z=-1, \\ 4+2y-z=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2+y, \\ y+z=-1, \\ 2y-z=-2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ z=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

Получаем, что $a_4 = a_1 - a_2$.

2. Разложим $a_5 = (-2, 2, 1, 1)$

Пусть $a_5 = xa_1 + ya_2 + za_3$, получаем систему:

$$\begin{cases} x-y=-2, \\ -x+y=2, \\ y+z=1, \\ 2x-z=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2+y, \\ y+z=1, \\ -4+2y-z=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + y, \\ y + z = 1, \\ 2y - z = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Получаем, что $a_5 = 2a_2 - a_3$.

3. Разложим $a_6 = (0, 0, -2, 2)$. Очевидно, что $a_6 = -2a_3$.