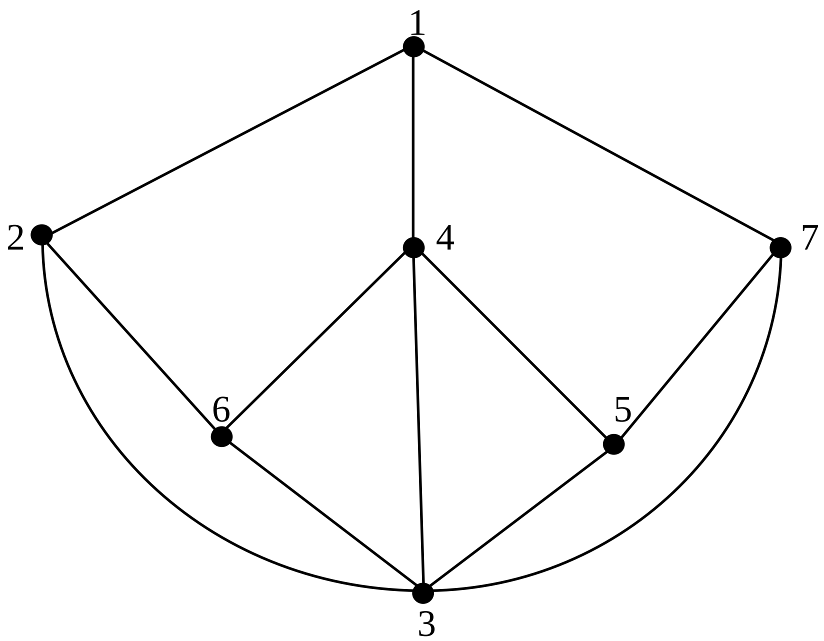
Контрольная работа с решением
Теория графов

Задача 12. В заданном неориентированном графе G найти все максимальные и все наиболее внутренние устойчивые (независимые) множества вершин.
$G = (V, E)$; $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$;
$E = \{(1,2), (1,4), (1,7), (2,3), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (4,6), (5,7)\}$.

Решение

Построим заданный граф:



Множество вершин U графа G = (V, E) называется ***независимым (внутренне устойчивым)***, если никакие две вершины из этого множества не смежны.

Внутренне устойчивое множество называется ***максимальным***, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества.

Наибольшее по мощности независимое множество называется ***наибольшим***.

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется ***числом независимости*** (или числом внутренней устойчивости) этого графа и обозначается $\alpha(G)$.

Очевидный алгоритм, который можно применить для нахождения независимых множеств вершин, это «полный перебор всех возможностей»: генерируем все возможные подмножества вершин заданного графа или орграфа и проверяем, является ли оно независимым. Среди всех независимых множеств выбираем максимальные.

Для заданного графа имеем следующие независимые множества вершин:

$S_1 = \{1,6,5\}$, $S_2 = \{2,4,7\}$, $S_3 = \{1,3\}$, $S_4 = \{2,5\}$, $S_5 = \{6,7\}$

$S_6 = \{2,4\}$, $S_7 = \{2,7\}$, $S_6 = \{4,7\}$, $S_9 = \{1,6\}$, $S_{10} = \{1,5\}$.

Эти множества являются внутренне устойчивыми. Проверим это, например, для S_1:

$\Gamma(1) = \{2,4,7\}$; $\Gamma(6) = \{2,3,4\}$; $\Gamma(5) = \{3,4,7\}$;

$\Gamma(S_1) = \Gamma(1) \cup \Gamma(6) \cup \Gamma(5) = \{2,3,4,7\}$;

$S_1 \cap \Gamma(S_1) = \{1,6,5\} \cap \{2,3,4,7\} = \emptyset$.

Очевидно, что максимальными внутренне устойчивыми множествами являются:

$S_1 = \{1,6,5\}$, $S_2 = \{2,4,7\}$, $S_3 = \{1,3\}$, $S_4 = \{2,5\}$, $S_5 = \{6,7\}$

Указанные множества не являются собственным подмножеством никакого другого внутренне устойчивого подмножества.

Задача 13. В заданном неориентированном графе G найти все минимальные и все наименьшие внешние устойчивые (доминирующие) множества вершин.

Решение

Подмножество вершин U графа G = (V,E) называется ***доминирующим или внешне устойчивым***, если каждая вершина из V\U смежна с некоторой вершиной из U. Иначе говоря, каждая вершина графа находится на расстоянии не более 1 от доминирующего множества.

Внешне устойчивое множество U называется ***минимальным***, если при удалении из него вершины получается множество, не являющееся внешне устойчивым.

Доминирующее множество, состоящее из наименьшего числа вершин, называется ***наименьшим***.

Для заданного графа множества $T_1 = \{1,3,4\}$, $T_2 = \{2,5,6,7\}$, $T_3 = \{1,2,3,7\}$, $T_4 = \{3,4,5,6\}$ являются внешне устойчивыми.

Проверим внешнюю устойчивость множества T_1.
$\Gamma(1) = \{2,4,7\}$; $\Gamma(3) = \{2,4,5,6,7\}$; $\Gamma(4) = \{1,5,6\}$
$T_1 \cap \Gamma(1) = \{4\} \neq \emptyset$; $T_1 \cap \Gamma(3) = \{4\} \neq \emptyset$; $T_1 \cap \Gamma(4) = \{1\} \neq \emptyset$.

Проверим внешнюю устойчивость множества T_2.
$\Gamma(2) = \{1,3,6\}$; $\Gamma(5) = \{3,4,7\}$; $\Gamma(6) = \{2,3,4\}$; $\Gamma(7) = \{1,3,5\}$.
$T_2 \cap \Gamma(2) = \{6\} \neq \emptyset$; $T_2 \cap \Gamma(5) = \{7\} \neq \emptyset$; $T_2 \cap \Gamma(6) = \{2\} \neq \emptyset$;
$T_2 \cap \Gamma(7) = \{5\} \neq \emptyset$.

Проверим внешнюю устойчивость множества T_3.
$\Gamma(1) = \{2,4,7\}$; $\Gamma(2) = \{1,3,6\}$; $\Gamma(3) = \{2,4,5,6,7\}$; $\Gamma(7) = \{1,3,5\}$.
$T_3 \cap \Gamma(1) = \{7\} \neq \emptyset$; $T_3 \cap \Gamma(2) = \{1,3\} \neq \emptyset$; $T_3 \cap \Gamma(3) = \{2,7\} \neq \emptyset$;
$T_3 \cap \Gamma(7) = \{1,3\} \neq \emptyset$.

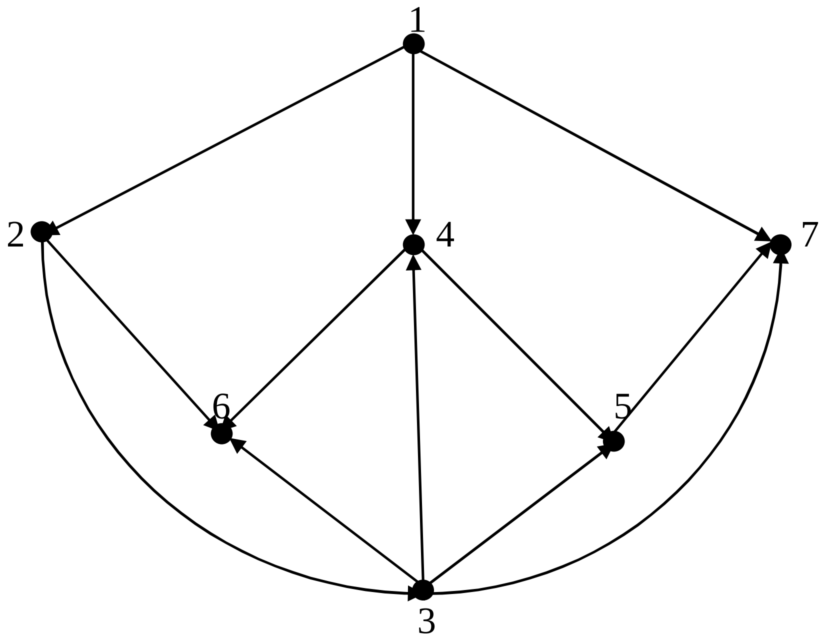
Проверим внешнюю устойчивость множества T_4.
$\Gamma(3) = \{2,4,5,6,7\}$; $\Gamma(4) = \{1,5,6\}$; $\Gamma(5) = \{3,4,7\}$; $\Gamma(6) = \{2,3,4\}$.
$T_4 \cap \Gamma(3) = \{4,5,6\} \neq \emptyset$; $T_4 \cap \Gamma(4) = \{5,6\} \neq \emptyset$; $T_4 \cap \Gamma(5) = \{3,4\} \neq \emptyset$;
$T_4 \cap \Gamma(6) = \{3,4\} \neq \emptyset$.

Множество T_1 является минимальным, так как удаление любой вершины приведет к тому, что получившееся множество не будет внешне устойчивым. Аналогично являются минимальными и множества T_2 , T_3 и T_4.

Задача 14. В заданном ориентированном графе G найти все минимальные и все наименьшие внешние устойчивые (доминирующие) множества вершин.

Решение

Зададим ориентацию ребер.



Для заданного графа множества $T_2 = \{1,2,3,4\}$, $T_3 = \{1,2,3,7\}$, $T_4 = \{3,4,5,6\}$ являются внешне устойчивыми.

Проверим внешнюю устойчивость множества T_1.

$\Gamma(1) = \{2,4,7\}$; $\Gamma(2) = \{3,6\}$; $\Gamma(3) = \{4,5,6,7\}$; $\Gamma(4) = \{1,3,5\}$.

$T_1 \cap \Gamma(1) = \{2,4\} \neq \emptyset$; $T_1 \cap \Gamma(2) = \{3\} \neq \emptyset$; $T_1 \cap \Gamma(3) = \{4\} \neq \emptyset$;

$T_1 \cap \Gamma(4) = \{1,3\} \neq \emptyset$.

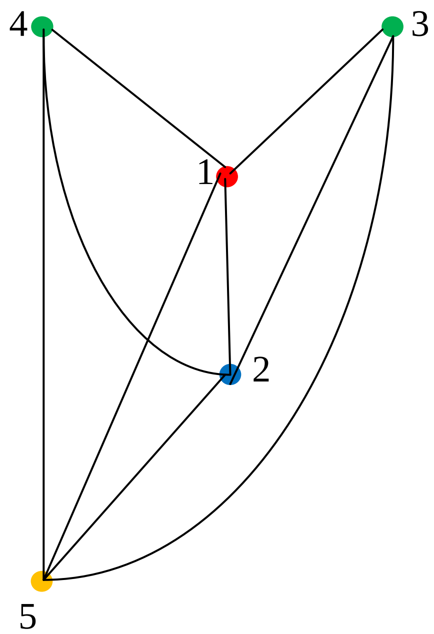
Очевидно, что заданное множество является минимальным, так как удаление любой вершины приведет к тому, что получившееся множество не будет внешне устойчивым.

Задача 15. Найдите хроматическое число и оптимальную раскраску графа.
$G = (V, E)$; $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,4), (4,5)\}$.

Решение

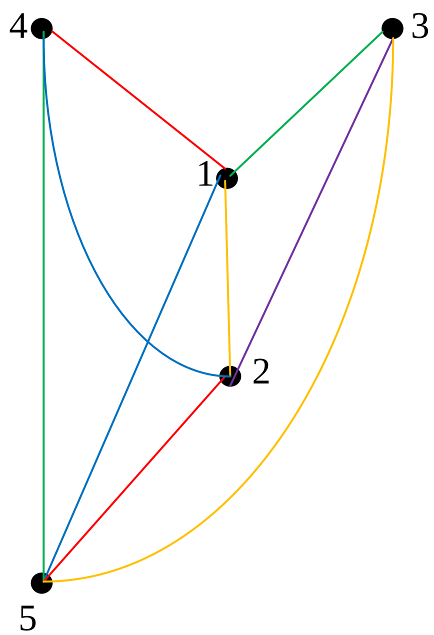
Хроматическое число графа — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Вершинная раскраска:



Хроматическое число равно 4.

Реберная раскраска:



Хроматическое число равно 5.

Задача 16. Найти максимальный поток и минимальный разрез между вершинами s и t в транспортной сети с ориентированным графом $G = (V, E)$; $V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, t\}$;

$E =$
$\{(s,1), (s,2), (s,3), (1,2), (1,4), (1,5), (2,6), (2,9), (3,2), (3,6), (3,7), (4,5), (4,8$
$(4,11), (5,8), (5,10), (6,1), (7,10), (7,t), (8,t), (8,9), (8,12), (9,6), (9,10), (9,t),$
$(10,t), (11,t), (11,12), (12,13), (13,8), (13,t)\}$.

Вес w_{ij} дуги (i,j) равен $N(i^2 + j^2) + i^2 + j^2 + i + j$ по модулю 10 (остаток от деления w_{ij} на 10). $N = 17$ - номер варианта.

Решение

Используя формулу $17 \cdot (i^2 + j^2) + i^2 + j^2 + i + j$ рассчитаем веса дуг: $w_{s1} = 9$; $w_{s2} = 4$; $w_{s3} = 5$; $w_{12} = 3$; $w_{14} = 1$; $w_{15} = 4$; $w_{26} = 8$; $w_{29} = 1$; $w_{32} = 9$; $w_{36} = 9$; $w_{37} = 4$; $w_{45} = 7$; $w_{48} = 2$; $w_{4,11} = 1$; $w_{58} = 5$; $w_{5,10} = 5$; $w_{61} = 3$; $w_{7,10} = 9$; $w_{7,t} = 9$; $w_{8,t} = 1$; $w_{89} = 7$, $w_{8,12} = 4$; $w_{96} = 1$; $w_{9,10} = 7$; $w_{9,t} = 7$; $w_{10t} = 1$; $w_{11,1} = 8$; $w_{11,12} = 3$; $w_{12,13} = 9$; $w_{13,8} = 5$; $w_{13,t} = 5$.

Построим заданную транспортную сеть (рис.1).

Согласно *теореме Форда и Фалкерсона*: максимальный поток в транспортной сети равен мощности минимального разреза, т.е.

$$\max_{\varphi} \varphi(y) = \min_{\varphi} c(A)$$

Алгоритм определения максимального потока по сети состоит их двух этапов.

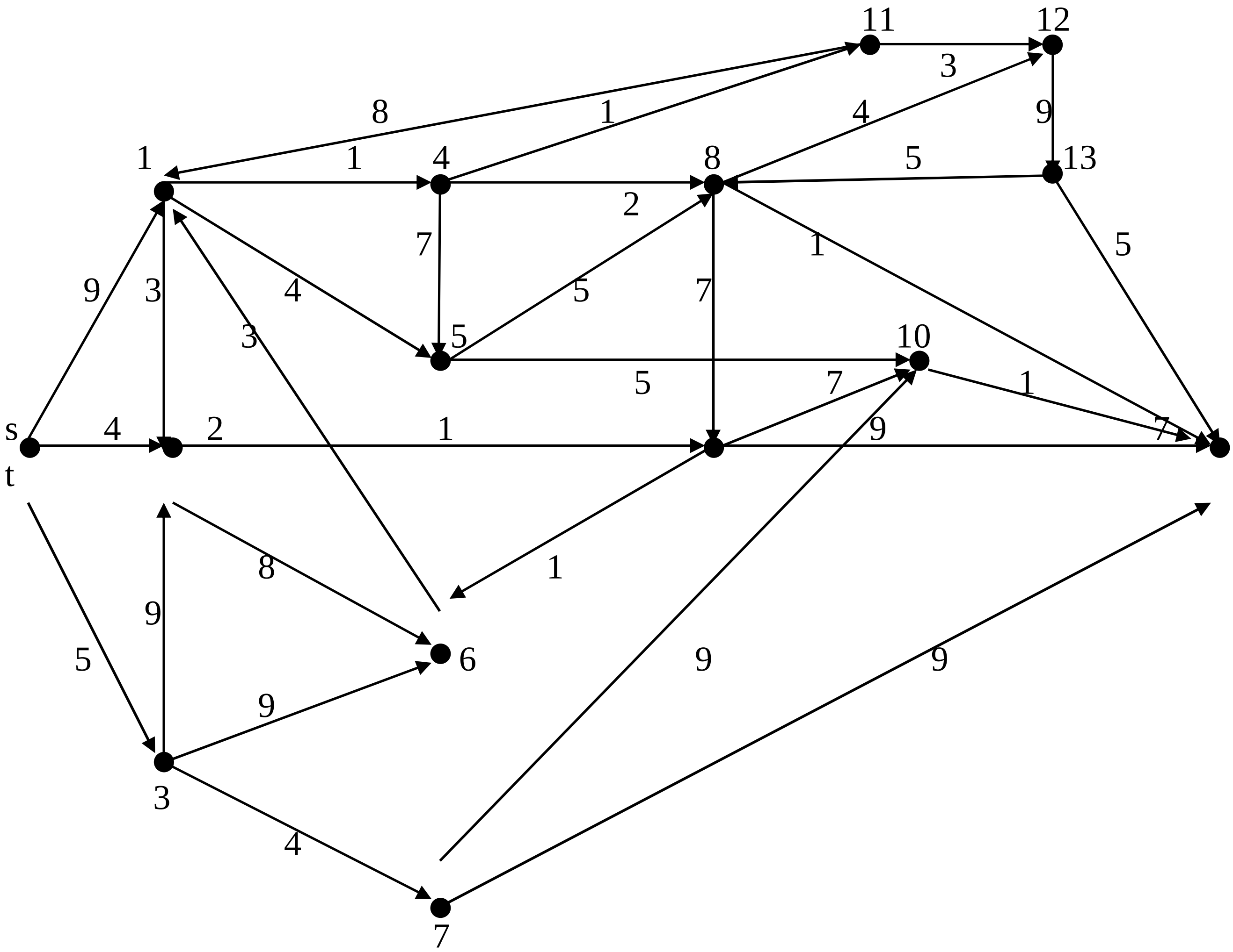


Рис.1.

I этап. Насыщение потока. Поток называется насыщенным, когда произвольный путь из s в t включает дугу $e \in E$, для которой $\varphi(e) = c(e)$. Задача первой части алгоритма состоит в насыщении потока.

1.1. Зададим произвольный начальный поток, например, нулевой на всех дугах $\forall e \in E\ \varphi(e), \varphi(e) = 0$.

1.2. Поиск пути из s в t. Если путь найдено, то переходим к пункту 1.3, в противном случае – переход к пункту 1.5.

1.3. Увеличиваем поток по найденному пути таким образом, чтобы одна из дуг была насыщенной.

1.4. Отмечаем насыщенную дугу и переходим к пункту 1.2, на поиск пути из s в t.

1.5. Сеть насыщена.

Для заданной транспортной сети применим приведенный алгоритм.

Шаг 1. Строим нулевой поток (рис.2).
Шаг 2. Находим путь из s в t в сети на рис.2: $s-2-9-t$.

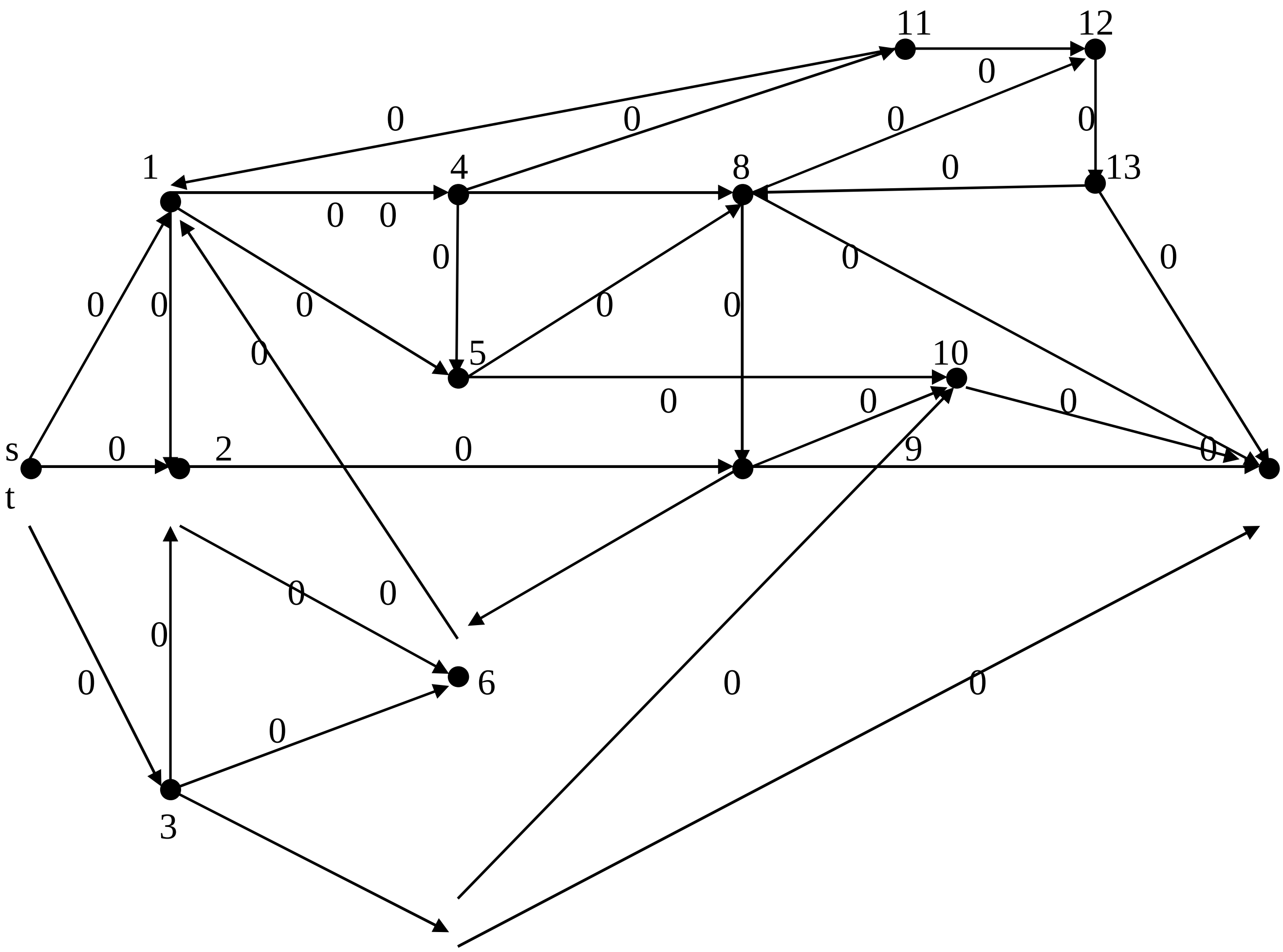


Рис.2

Шаг 3. Увеличиваем поток по данному маршруту на 1 и дуга (2,9) становится насыщенной: $\overline{\varphi} = 1$.

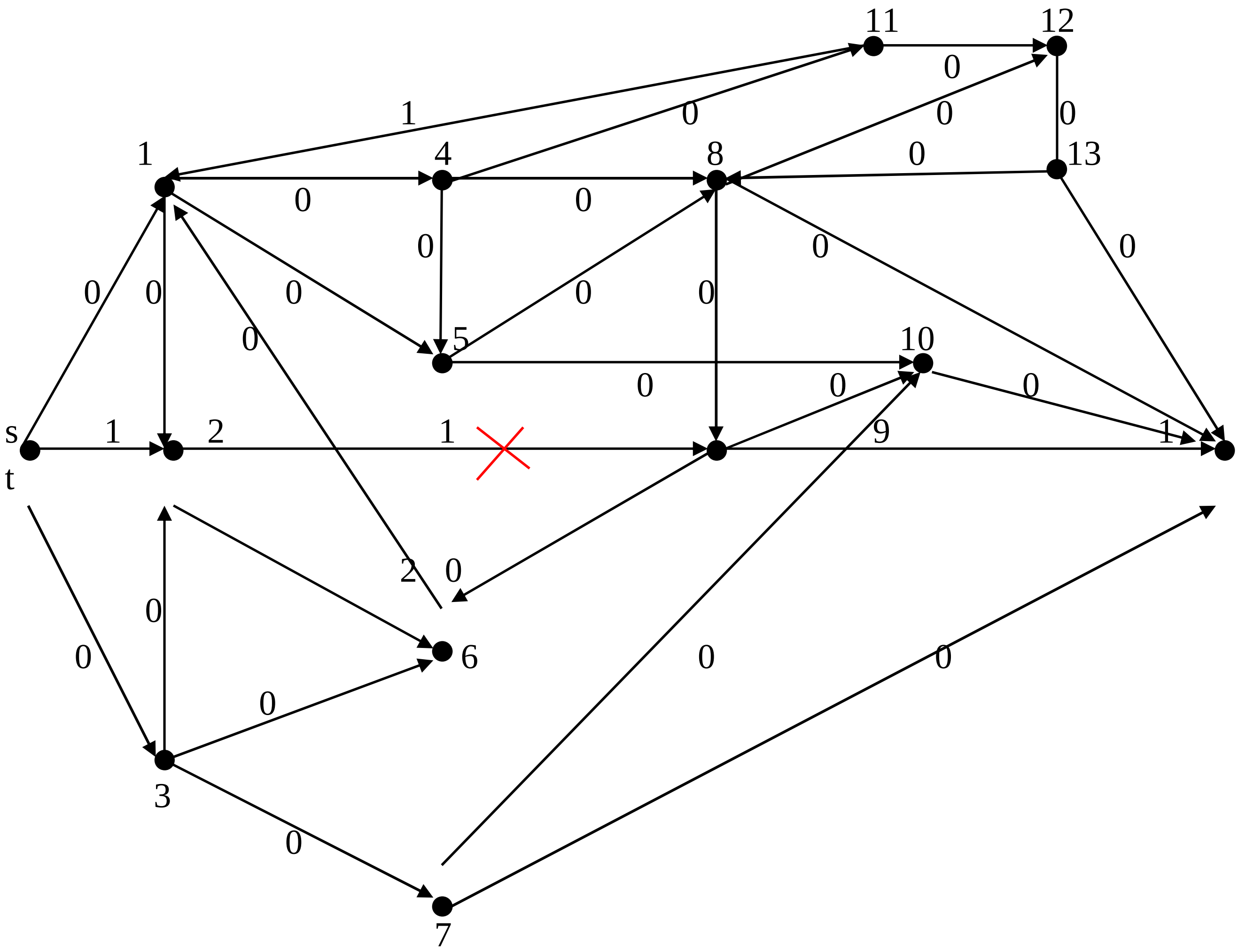


Рис.3

Шаг. 4. Отмечаем насыщенную дугу и возвращаемся к шагу на поиск пути из s в t. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Находим путь из s в t в сети на рис.3: $s - 1 - 5 - 10 - t$.

Шаг 3. Увеличиваем поток по данному маршруту на 1 и дуга (10, t) становится насыщенной: $\overline{\varphi} = 2$.

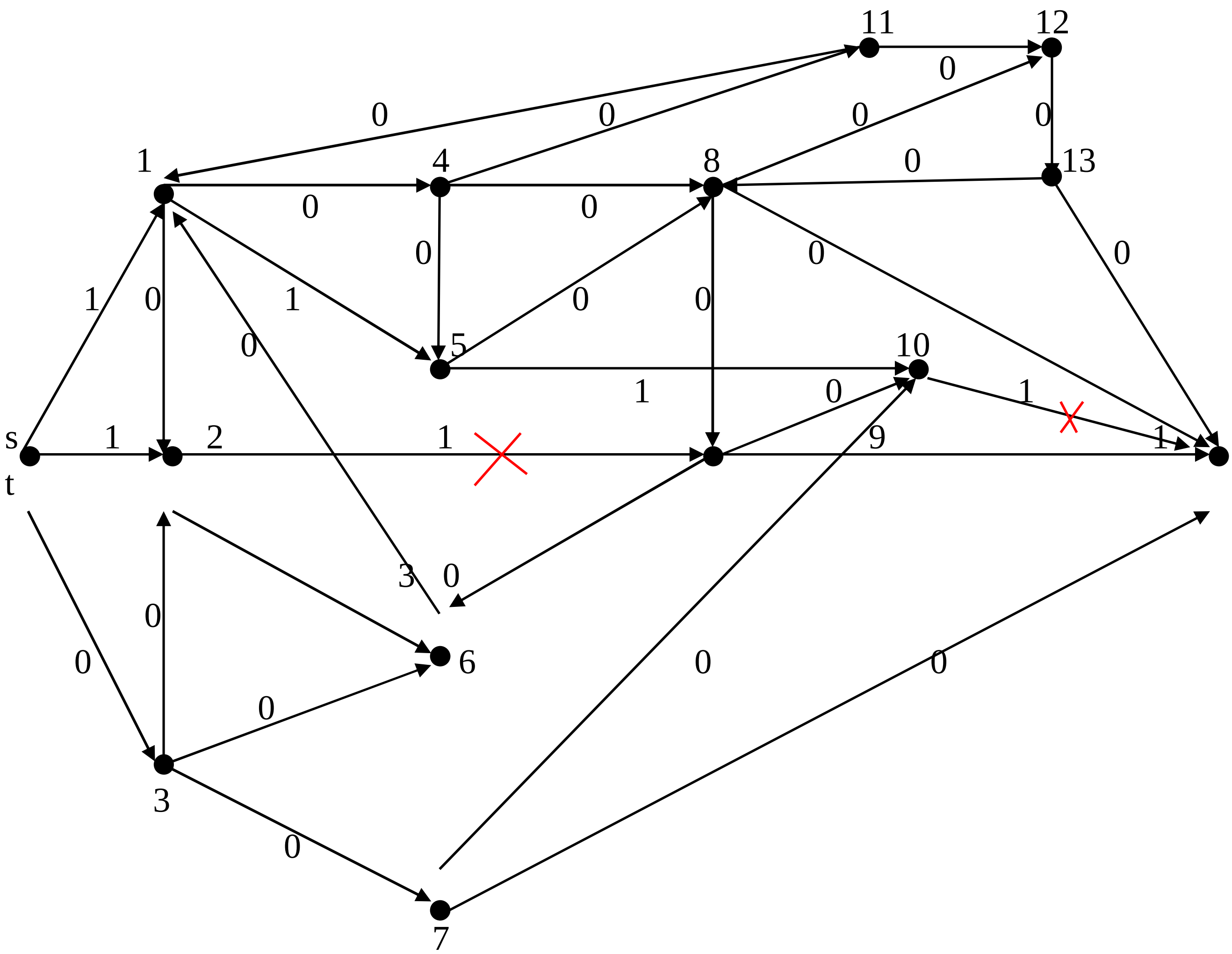


Рис.4

Шаг 4. Отмечаем насыщенную дугу и возвращаемся к шагу на поиск пути из s в t. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Находим путь из s в t в сети на рис.4: $s-1-4-8-t$.

Шаг 3. Увеличиваем поток по данному маршруту на 1 и дуги (1, 4) и (8, t) становятся насыщенными: $\overline{\varphi} = 3$.

Шаг 4. Отмечаем насыщенную дугу и возвращаемся к шагу на поиск пути из s в t. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Находим путь из s в t в сети на рис.5: $s-1-5-8-12-13-t$.

Шаг 3. Увеличиваем поток по данному маршруту на 3 и дуга (1, 5) становится насыщенной: $\overline{\varphi}=6$.

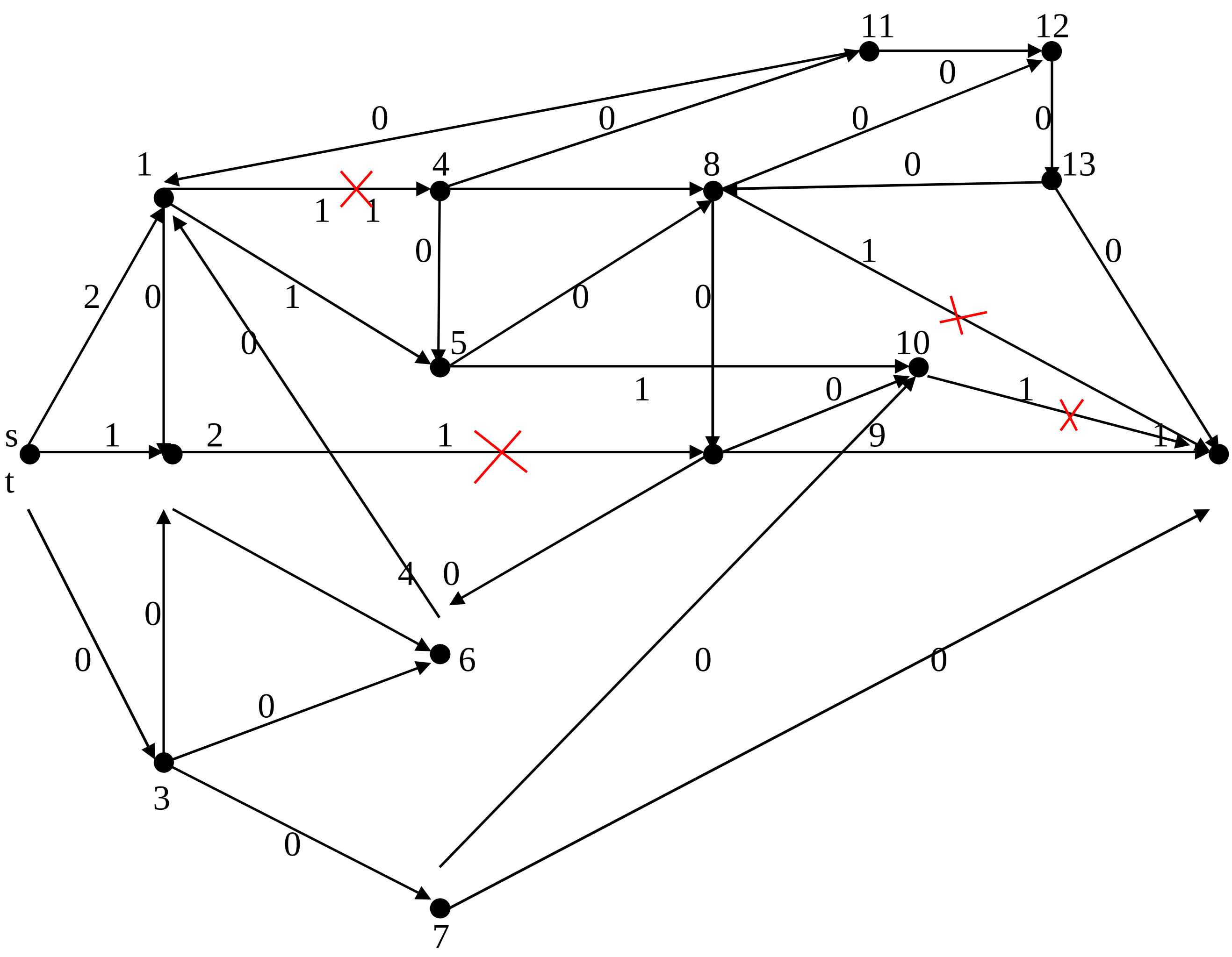


Рис.5

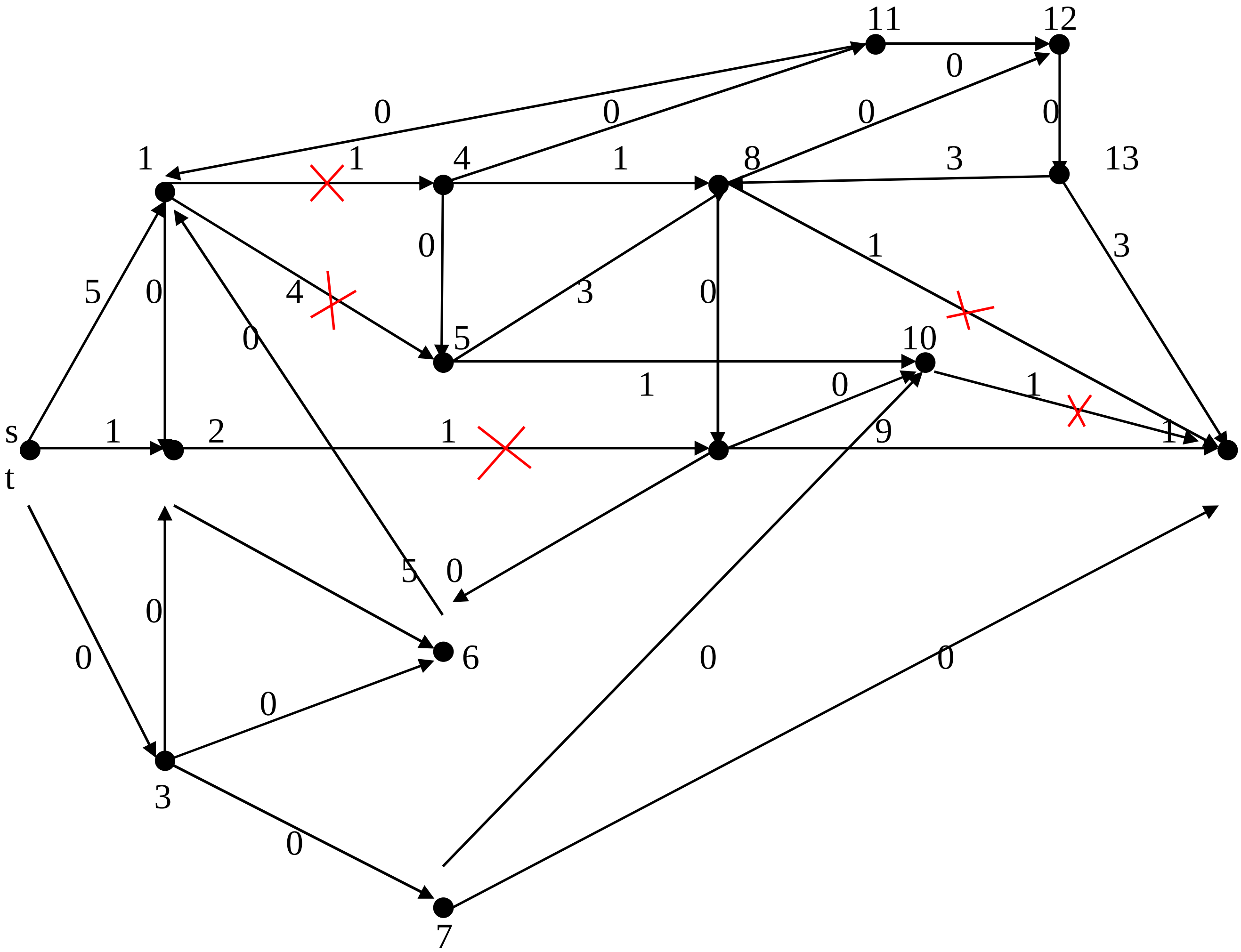


Рис.6

Шаг 4. Отмечаем насыщенную дугу и возвращаемся к шагу на поиск пути из s в t. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Находим путь из s в t в сети на рис.6: $s-3-7-t$.

Шаг 3. Увеличиваем поток по данному маршруту на 4 и дуга (3,7) становится насыщенной: $\overline{\varphi}=10$.

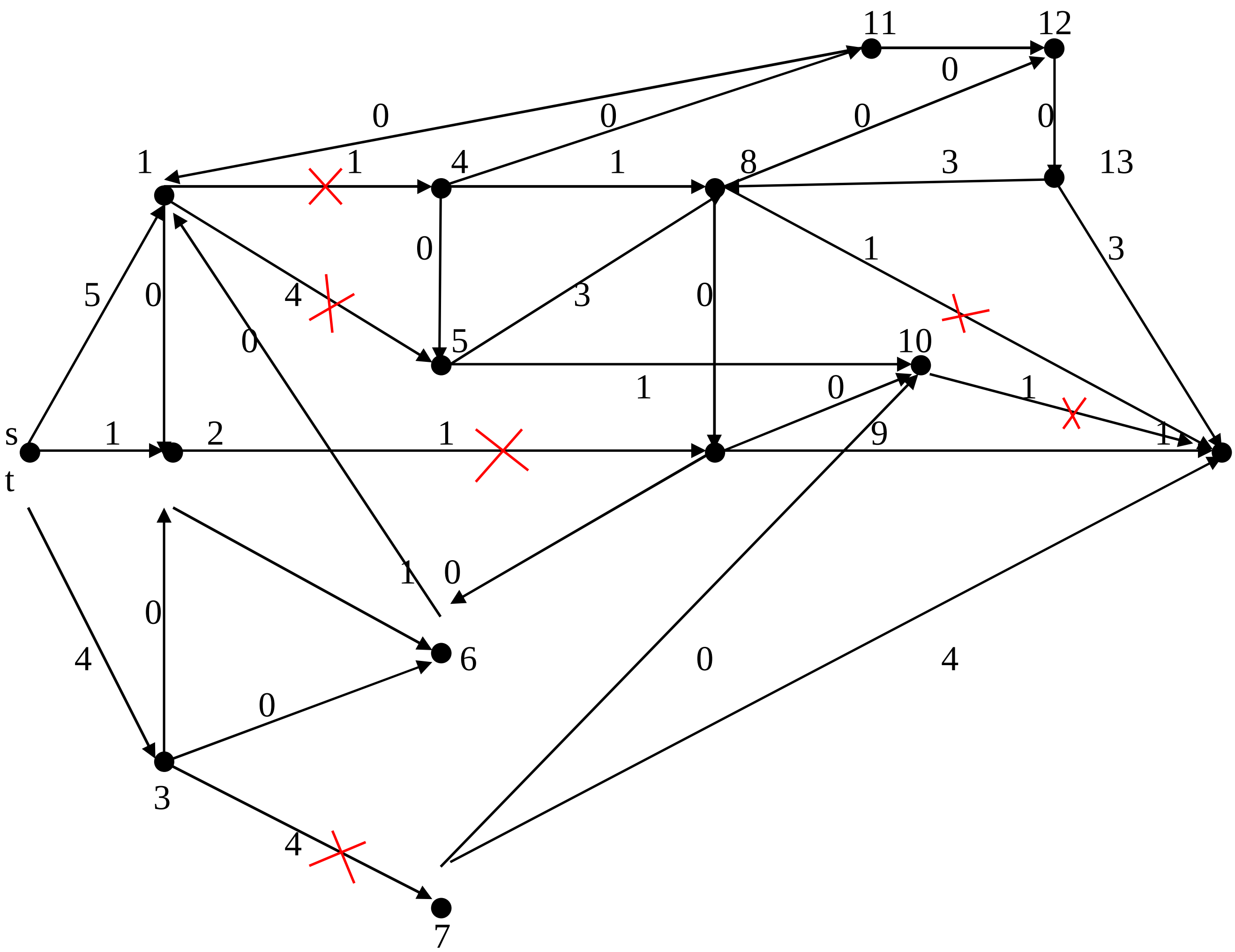


Рис.7

Шаг 4. Отмечаем насыщенную дугу и возвращаемся к шагу на поиск пути из s в t. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Путь из s в t в сети отсутствует. Сеть насыщена.

<u>II этап.</u> Перераспределение потока. Пусть имеется насыщенный поток (рис.7). Сделаем рекурсивным образом пометки вершин сети.

1. Вершину s обозначим через 0. Смежные вершины x_i и x_j обозначим $+i$, если данные вершины соединены ненасыщенным ребром $x_i \to x_j(+i)$, и отмечаем $-i$, если соединены непустым ребром $x_i \leftarrow x_j(-i)$.

Пометим вершины заданной сети (рис.8). После пометок вершин возможны два случая: вершина t отмечена или не отмечена.

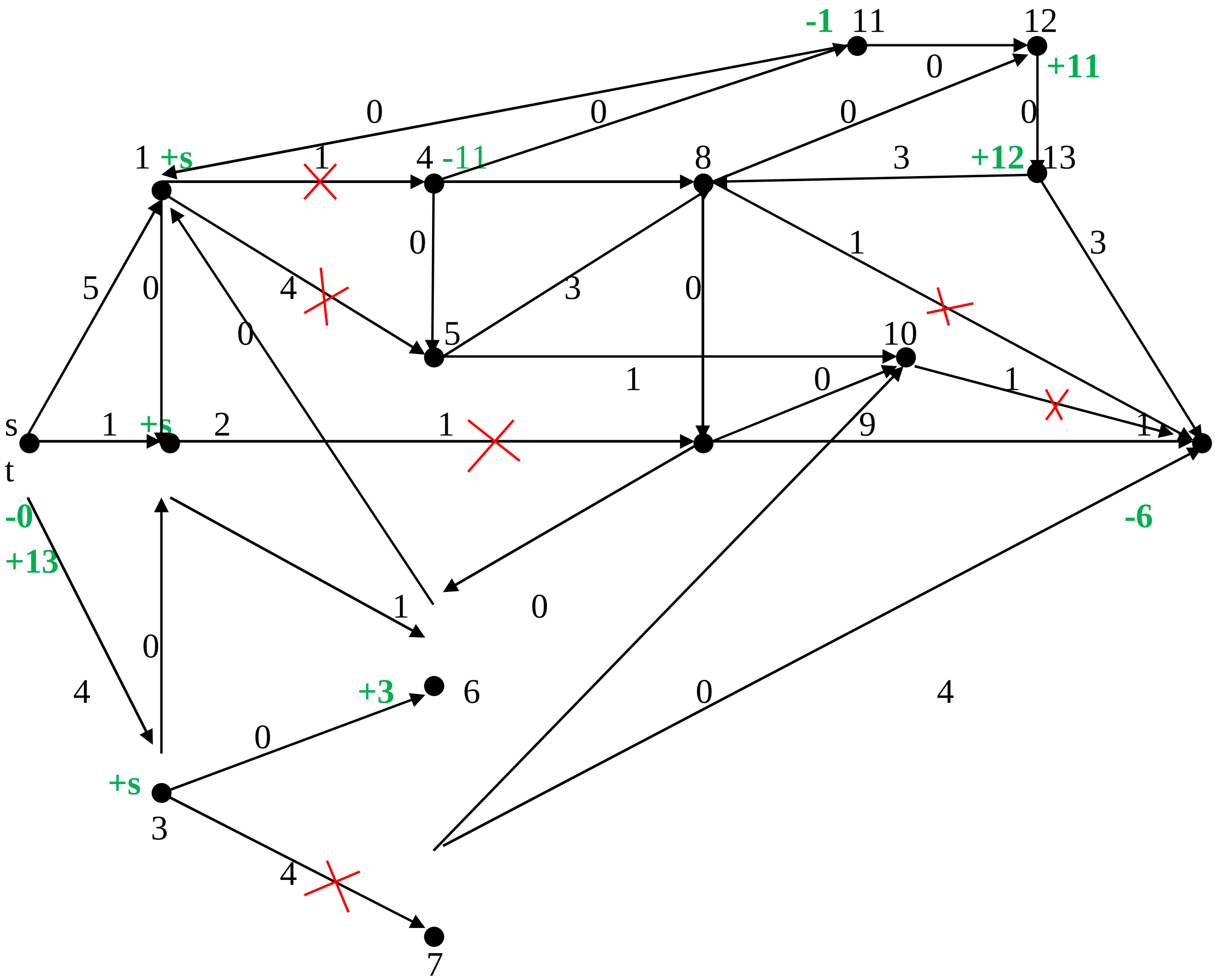


Рис.8

2. Вершина t помечена, т.е. существует последовательность от s в t в сети. В этой последовательности каждая последующая вершина обозначена номером предыдущей (рис.8).