Расчетно-графическая работа

Векторная алгебра

РГР №2

Задача 2. Даны координаты четырех точек A, B, C и D. Проверьте, что эти точки не лежат в одной плоскости и найдите средствами векторной алгебры:

А) уравнение плоскости ABC;
Б) уравнение прямой AB;

В) площадь треугольника ABC;

Г) уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на основание ABC;

Д) координаты точки K - основания высоты;

Е) угол между ребром DA и основанием ABC и угол между гранями ABC и ADC;

Ж) объем пирамиды $ABCD$.

Сделайте проверку: $V = \frac{1}{3}SH$.

$A(1;2;0)$, $B(5;5;0)$, $C(5;5;1)$, $D(8;1;0,5)$

Решение.

А) Найдем уравнение плоскости ABC.

Найдем координаты векторов
$\overline{AB} = \{5-1;5-2;0-0\} = \{4;3;0\}$,
$\overline{AC} = \{5-1;5-2;1-0\} = \{4;3;1\}$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 3 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3\bar{i}-4\bar{j}+0\bar{k}=\{3;-4;0\}.$$

Тогда в качестве нормали к плоскости ABC можно выбрать вектор $\bar{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\{3;-4;0\}$.
Уравнение плоскости примет вид:

$$3(x-x_A)-4(y-y_A)+0(z-z_A)=0,$$
$$3(x-1)-4(y-2)+0(z-0)=0,$$
$$3x-3-4y+8=0,$$
$$3x-4y+5=0.$$

Получили $3x-4y+5=0$. Проверим, что точки не лежат в одной плоскости. Подставим координаты $D(8;1;0,5)$ в данное уравнение:

$$3\cdot 8-4\cdot 1+5=24-4+5\neq 0.$$

Точки не лежат в одной плоскости.

Б) Найдем уравнение прямой AB. В качестве направляющего вектора для прямой AB можно выбрать вектор $\overline{AB}$, тогда канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_A}{4}=\frac{y-y_A}{3}=\frac{z-z_A}{0},$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{0}.$$

В) Найдем площадь треугольника ABC по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+16}=\frac{5}{2}=2,5.$$

Г) Найдем уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на основание ABC.

Так как высота $DK\perp ABC$, в качестве направляющего вектора DK можно выбрать нормаль к плоскости ABC: $\overline{n}=\{3;-4;0\}$. Так как высота проходит через точку $D(8;1;0,5)$, уравнение ее имеет вид:

$$\frac{x-x_D}{3}=\frac{y-y_D}{-4}=\frac{z-z_D}{0},$$

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-0,5}{0}.$$

Длина высоты – это расстояние от вершины $D(8;1;0,5)$ до плоскости ABC: $3x-4y+5=0$.

$$H=DK=\frac{|3x_D-4y_D+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\cdot 8-4\cdot 1+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{24-4+5}{5}=\frac{25}{5}=5.$$

Д) Найдем координаты точки K - основания высоты. Для этого запишем параметрические уравнение прямой DK:

$$\begin{cases} x=3t+8,\\ y=-4t+1,\\ z=0,5. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости ABC:

$$3(3t+8)-4(-4t+1)+5=0,$$
$$9t+24+16t-4+5=0,$$
$$25t=-25,$$
$$t=-1.$$

Подставляем и находим точку пересечения данной прямой с этой плоскостью:

$$\begin{cases} x=-3+8=5, \\ y=4+1=5, \\ z=0,5. \end{cases}$$

Точка $K(5;\ 5;\ 0,5)$.

E) Найдем угол β между ребром DA и основанием ABC.

Найдем координаты вектора $\overline{AD}=\{8-1;1-2;0,5-0\}=\{7;-1;0,5\}$.

$$\sin\beta=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{n}}{|\overline{AD}|\cdot|\overline{n}|}=\frac{7\cdot 3-1\cdot(-4)+0,5\cdot 0}{\sqrt{7^2+(-1)^2+0,5^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}=\frac{25}{\sqrt{50,25}\sqrt{25}}=\frac{5}{\sqrt{50,25}}$$

откуда $\beta=\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{50,25}}\right)\approx 44,9^0$.

Найдем угол между гранями ABC и ADC. Для этого нужно найти нормаль к плоскости ADC.

Найдем векторное произведение:

$$\overline{AD}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -1 & 0,5\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & 0,5\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}7 & 0,5\\ 4 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}7 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=.$$

$$=\bar{i}(-1-1,5)-\bar{j}(7-2)+\bar{k}(21+4)=\{-2,5;-5;25\}.$$

Тогда в качестве нормали к плоскости ADC можно выбрать вектор

$$\overline{n_2}=-\frac{2}{5}\left(\overline{AD}\times\overline{AC}\right)=-\frac{1}{5}\{-5;-10;50\}=\{1;2;-10\}.$$

Тогда угол γ между гранями ABC и ADC найдем по формуле

$$\cos\gamma=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3\cdot1-4\cdot2+0\cdot(-10)}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-10)^2}}=\frac{-5}{\sqrt{25}\sqrt{105}}=-\frac{1}{\sqrt{105}}$$, откуда

$$\gamma=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{105}}\right)\approx95,6^0.$$

Ж) Найдем объем пирамиды $ABCD$. Сначала вычислим смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\ 4 & 3 & 1\\ 7 & -1 & 0,5\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0,5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & 1\\ 7 & 0,5\end{vmatrix}=4(1,5+1)-3(2-7)=10+15=25.$$

Тогда объем пирамиды равен: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{25}{6}.$

Сделаем проверку: $V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\frac{5}{2}5=\frac{25}{6}$. Верно.