Методы оптимальных решений
Контрольная работа

Задача 1.

Предприятие производит продукцию двух видов (А и Б), используя при изготовлении этой продукции ресурсы трех видов (первого, второго и третьего). Чтобы произвести одну единицу продукции А, нужно затратить по 1 единице первого и второго ресурсов и 2 единицы третьего ресурса. Для производства единицы продукции Б требуется 2 единицы первого ресурса и 1 единица второго ресурса. Запасы ресурсов у предприятия ограничены: на складах есть 100 единиц первого ресурса, 60 единиц второго и 80 единиц третьего ресурса. Рыночная цена продукции А составляет 750 руб. а цена продукции Б равна 1000 руб. Сколько продукции следует произвести, чтобы получить наибольшую выручку?

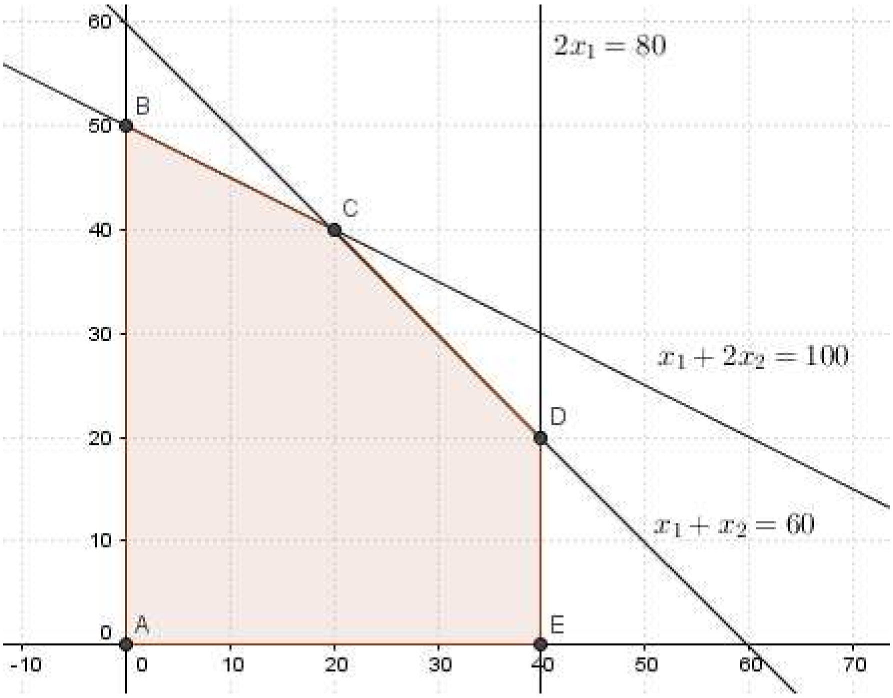
Решение.

Пусть планируется производить x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции Б, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.
Затраты первого ресурса на производство составят $1x_1 + 2x_2$ единиц, что не должно превышать запас в 100 единиц: $x_1 + 2x_2 \le 100$.
Затраты второго ресурса на производство составят $1x_1 + 1x_2$ единиц, что не должно превышать запас в 60 единиц: $x_1 + x_2 \le 60$.
Затраты третьего ресурса на производство составят $2x_1 + 0x_2$ единиц, что не должно превышать запас в 80 единиц: $2x_1 \le 80$.
Выручка от продажи произведенной продукции составит $750x_1 + 1000x_2$. Запишем задачу линейного программирования:

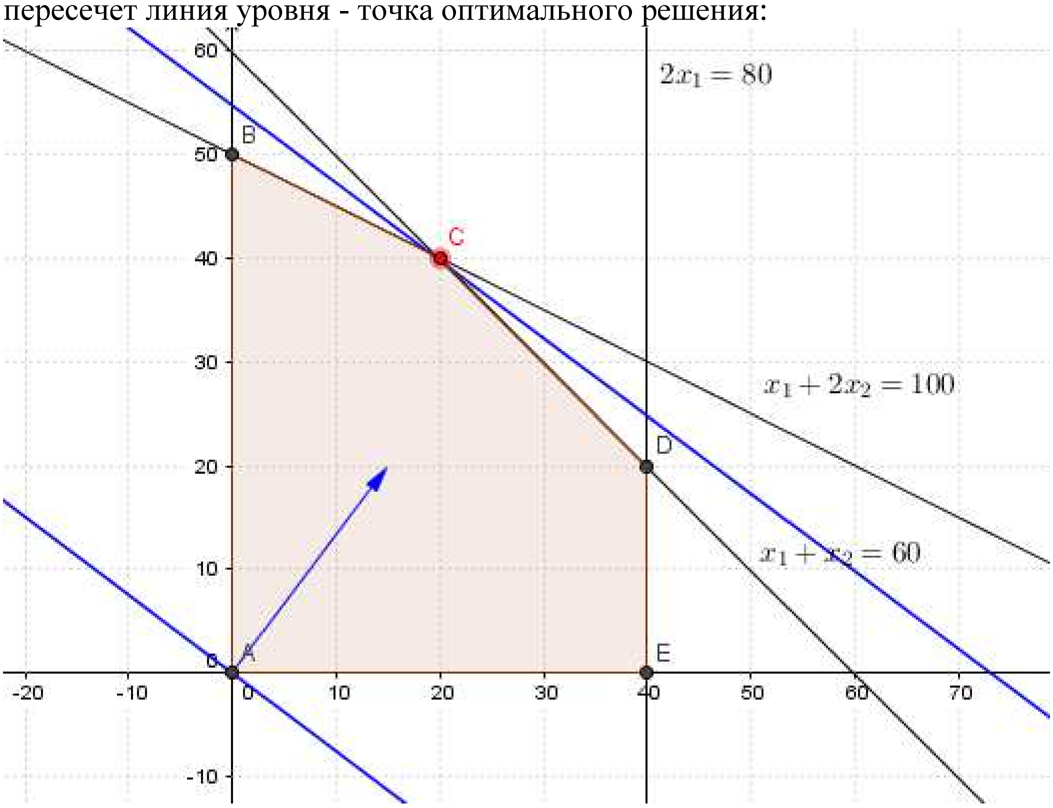
$$f(X) = 750x_1 + 1000x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ 2x_1 \le 80 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим полученную задачу графически.
Построим область допустимых решений - множество точек $(x_1; x_2)$, отвечающих всем неравенствам системы ограничений. Построим прямые
$x_1 + 2x_2 = 100, x_1 + x_2 = 60, 2x_1 = 80$ и определим ОДР:



Построим линию уровня - прямую $750x_1 + 1000x_2 = 0$ и будем перемещать ее в направлении вектора $\bar{c} = grad\, f = (750; 1000)$. Последняя точка ОДР, которую при этом пересечет линия уровня - точка оптимального решения:



Итак, точка оптимального решения лежит на пересечении прямых $x_1 + 2x_2 = 100$ и $x_1 + x_2 = 60$. Ее координаты:

$x_1 = 20; x_2 = 40$

Итак, следует производить 20 единиц продукта А и 40 единиц продукта Б. Выручка составит:

$f(20; 40) = 750 \cdot 20 + 1000 \cdot 40 = 55000$

Ответ. Для получения максимальной выручки (55000 руб) следует производить 20 единиц продукта А и 40 единиц продукта Б.

Задача 2.

Для производственной функции $Y = F(K,L) = 6K^{0.3} \cdot L^{0.8}$ определить оптимальное соотношение факторов K, L в предположении, что цены использования факторов равны $C_K = 4$ и $C_L = 5$ соответственно. Найти эластичности выпуска Y по производственным факторам; найти нормы замещения одного фактора другим.

Решение.

<u>Оптимальное соотношение факторов.</u>

Оптимальное соотношение факторов определяется равенством предельной производительности цене фактора (предельным издержкам):

$$MRP_K = \frac{dY}{dK} = C_K; \quad MRP_L = \frac{dY}{dL} = C_L$$

Находим предельные производительности:

$$\frac{dY}{dK} = \frac{d}{dK}(6K^{0.3} \cdot L^{0.8}) = 6 \cdot 0.3K^{0.3-1} \cdot L^{0.8} = 1.8 \cdot \frac{L^{0.8}}{K^{0.7}}$$

$$\frac{dY}{dL} = \frac{d}{dL}(6K^{0.3} \cdot L^{0.8}) = 6 \cdot K^{0.3} \cdot 0.8L^{0.8-1} = 4.8 \cdot \frac{K^{0.3}}{L^{0.2}}$$

Получаем соотношение:

$$\begin{cases} 1.8 \cdot \dfrac{L^{0.8}}{K^{0.7}} = 4 \\ 4.8 \cdot \dfrac{K^{0.3}}{L^{0.2}} = 5 \end{cases} \to \begin{cases} L^{0.8} = \dfrac{4}{1.8}K^{0.7} \\ L^{0.2} = \dfrac{4.8}{5}K^{0.3} \end{cases} \to \begin{cases} L^{0.2} = \dfrac{4.8}{5}K^{0.7} \\ \dfrac{4}{1.8}K^{0.7} = \left(\dfrac{4.8}{5}K^{0.3}\right)^4 \end{cases}$$

$$\frac{4}{1.8}K^{0.7} = \left(\frac{4.8}{5}K^{0.3}\right)^4 \to K^{0.7}\left(\frac{4.8^4}{5^4}K^{0.5} - \frac{4}{1.8}\right) = 0 \to K^{0.5} = \frac{4 \cdot 5^4}{1.8 \cdot 4.8^4}$$

$$K \approx 6.8455$$

$$L^{0.2} = \frac{4.8}{5}K^{0.7} \to \quad L \approx 14.6037$$

<u>Эластичности.</u>

Эластичность выпуска по капиталу показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если основные фонды увеличить на 1%.

$$\frac{\dfrac{[6(1.01K)^{0.3} \cdot L^{0.8}] - [6K^{0.3} \cdot L^{0.8}]}{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}}}{\dfrac{1.01K - K}{K}} = \frac{\dfrac{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}(1.01^{0.3} - 1)}{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}}}{0.01} = 100 \cdot (1.01^{0.3} - 1) \approx$$

$$\approx 0.2990\%$$

При изменении капитала на 1%, выпуск изменяется на 0.2990%.

Эластичность выпуска по труду показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если число занятых увеличить на 1%.

$$\frac{\dfrac{[6K^{0.3} \cdot (1.01L)^{0.8}] - [6K^{0.3} \cdot L^{0.8}]}{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}}}{\dfrac{1.01L - L}{L}} = \frac{\dfrac{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}(1.01^{0.8} - 1)}{6K^{0.3} \cdot L^{0.8}}}{0.01} = 100 \cdot (1.01^{8} - 1) \approx$$

$$\approx 0.7992\%$$

При изменении труда на 1%, выпуск изменяется на 0.7992%.

Предельные нормы замещения.

Предельная норма замещения труда капиталом:

$$-\frac{dY/dK}{dY/dL}=-\frac{1.8\cdot\frac{L^{0.8}}{K^{0.7}}}{4.8\cdot\frac{K^{0.3}}{L^{0.2}}}=-\frac{18}{48}\cdot\frac{L}{K}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{14.6037}{6.8455}\approx-0.8000$$

Предельная норма замещения капитала трудом:

$$-\frac{dY/dL}{dY/dK}=-\frac{4.8\cdot\frac{K^{0.3}}{L^{0.2}}}{1.8\cdot\frac{L^{0.8}}{K^{0.7}}}=-\frac{48}{18}\cdot\frac{K}{L}=-\frac{8}{3}\cdot\frac{6.8455}{14.6037}\approx-1.2500$$

Задача 3.

Предпочтения некоторого потребителя описываются функцией полезности $U(x_1,x_2)=3\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, где x_1 – количество первого блага в потребительском наборе, x_2 – количество второго блага в этом же наборе. Цена первого блага равна $C_1=2$ денежных единиц, цена второго блага равна $C_2=3$ денежных единиц, доход потребителя составляет $M=3000$ денежных единиц. В предположении, что потребитель весь доход расходует только на покупку этих двух благ, определить какое количество первого и второго блага следует покупать потребителю, чтобы достичь максимального уровня полезности?

Решение.

Требуется найти максимум функции $U(x_1,x_2)=3\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ при условии $2x_1+3x_2=3000$.

Выразим из уравнения связи переменную x_1: $x_1=1500-\frac{3}{2}x_2$. Подставим выражение для x_1 в функцию полезности, получим функцию одной переменной:

$$U(x_2)=3\sqrt{\left(1500-\frac{3}{2}x_2\right)^2+x_2^2}=3\sqrt{1500^2-4500x_2+\frac{13}{4}x_2^2}$$

Минимальное количество второго блага равно 0, максимальное - $\frac{3000}{3}=1000$. Найдем наибольшее значение функции $U(x_2)$ на отрезке $[0;100]$.

$$U'=\frac{3}{2\sqrt{1500^2-4500x_2+\frac{13}{4}x_2^2}}\cdot\left(\frac{13}{2}x_2-4500\right)$$

$$U'=0\to\ \frac{13}{2}x_2-4500\to\ \ x_2=4500\cdot\frac{2}{13}\approx\frac{9000}{13}$$

Найдем значение функции $U(x_2)$ на краях отрезка: $x_2=0,x_2=100$ и в критической точке $x_2=\frac{9000}{13}$.

$$U(x_2=0)=3\sqrt{\left(1500-\frac{3}{2}\cdot 0\right)^2+0^2}=3\cdot 1500=4500$$

$$U\left(x_2=\frac{9000}{13}\right)=3\sqrt{\left(1500-\frac{3}{2}\cdot\frac{9000}{13}\right)^2+\left(\frac{9000}{13}\right)^2}=\frac{9000\sqrt{13}}{13}\approx 2496.15$$

$$U(x_2 = 1000) = 3\sqrt{\left(1500 - \frac{3}{2}\cdot 1000\right)^2 + 1000^2} = 3\cdot 1000 = 3000$$

Наибольшее из полученных значений достигается в точке $x_2 = 0$. Тогда оптимальные количества благ:

$$x_1^* = 1500 - \frac{3}{2}\cdot 0 = 1500;\ \ x_2^* = 0;\ U^* = \ U(1500;0) = 4500$$

Ответ. 1500 единиц первого блага; 0 единиц второго блага.