Решение лабораторной работы
Теория принятия решений

Задача 1

Проанализировать ситуацию с точки зрения критериев

1. Критерия Лапласа;
2. Максиминного (минимаксного) критерия;
3. Критерия Сэвиджа;
4. Критерия Гурвица.

Администрации театра нужно решить, сколько заказать программок для представлений. Стоимость заказа 200 ф. ст. плюс 30 пенсов за штуку. Программки продаются по 60 пенсов за штуку, и к тому же доход от рекламы составит дополнительные 300 ф.ст.
Из прошлого опыта известна посещаемость театра:

Посещаемость	4000	4500	5000	5500	6000
Ее вероятность	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Ожидается, что 40% зрителей купят программки.

Решение.

Определяем множество допустимых вариантов количества программок.
Известны посещаемость и процент покупки программок, значит могут купить 4000*0,4 = 1600 программок, 4500*0,4=1800, 2000, 2200, 2400 программок.
Таким образом у администрации театра 5 стратегий.
Составляем матрицу сочетания стратегий администрации и посещаемости.

Количество посетителей	4000	4500	5000	5500	6000
Стратегии театра \ Количество покупателей программок	B1= 1600	B2= 1800	B3= 2000	B4= 2200	B5= 2400
A1=1600					
A2=1800					
A3=2000					
A4=2200					
A5=2400					

Далее рассчитываем ожидаемые прибыли по каждому варианту.
Формула прибыли: 60 * проданное количество + 300 - 200 - 30 * закупленное количество = 100 + 60 * проданное количество - 30 * закупленное количество.
При этом проданное количество определяется как минимум из закупленного количества и количества потенциальных покупателей.

Стратегии театра \ Количество покупателей программок	B1= 1600	B2= 1800	B3= 2000	B4= 2200	B5= 2400
A1=1600	48100	60100	72100	84100	96100
A2=1800	42100	54100	66100	78100	90100
A3=2000	36100	48100	60100	72100	84100
A4=2200	30100	42100	54100	66100	78100
A5=2400	24100	36100	48100	60100	72100

Теперь решаем, какую стратегию закупок предпочтительнее выбрать.

Критерий Байеса.

По критерию Байеса за оптимальные принимается та стратегия (чистая) A_i, при которой максимизируется средний выигрыш a или минимизируется средний риск r.

Считаем значения $\sum(a_{ij}p_j)$

$\sum(a_{1,j}p_j)$ = 48100•0,1 + 48100•0,3 + 48100•0,3 + 48100•0,2 + 48100•0,1 = 48100
$\sum(a_{2,j}p_j)$ = 42100•0,1 + 54100•0,3 + 54100•0,3 + 54100•0,2 + 54100•0,1 = 52900
$\sum(a_{3,j}p_j)$ = 36100•0,1 + 48100•0,3 + 60100•0,3 + 60100•0,2 + 60100•0,1 = 54100
$\sum(a_{4,j}p_j)$ = 30100•0,1 + 42100•0,3 + 54100•0,3 + 66100•0,2 + 66100•0,1 = 51700
$\sum(a_{5,j}p_j)$ = 24100•0,1 + 36100•0,3 + 48100•0,3 + 60100•0,2 + 72100•0,1 = 46900

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\sum(a_{ij}p_j)$
A_1	4810	14430	14430	9620	4810	48100
A_2	4210	16230	16230	10820	5410	52900
A_3	3610	14430	18030	12020	6010	54100
A_4	3010	12630	16230	13220	6610	51700
A_5	2410	10830	14430	12020	7210	46900
p_j	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1	

Выбираем из (48100; 52900; 54100; 51700; 46900) максимальный элемент max=54100.

Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Лапласа.

Если вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которого все состояния природы полагаются равновероятными, т.е.:

$q_1 = q_2 = ... = q_n = 1/n.$

$q_i = 1/5.$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\sum(a_{ij})$
A_1	9620	9620	9620	9620	9620	48100

A_2	8420	10820	10820	10820	10820	51700
A_3	7220	9620	12020	12020	12020	52900
A_4	6020	8420	10820	13220	13220	51700
A_5	4820	7220	9620	12020	14420	48100
p_j	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	

Выбираем из (48100; 51700; 52900; 51700; 48100) максимальный элемент max=52900

Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Вальда.

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е.

$a = \max(\min a_{ij})$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min(a_{ij})$
A_1	48100	48100	48100	48100	48100	48100
A_2	42100	54100	54100	54100	54100	42100
A_3	36100	48100	60100	60100	60100	36100
A_4	30100	42100	54100	66100	66100	30100
A_5	24100	36100	48100	60100	72100	24100

Выбираем из (48100; 42100; 36100; 30100; 24100) максимальный элемент max=48100

Вывод: выбираем стратегию 1.

Критерий Севиджа.

Критерий минимального риска Севиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается:

$a = \min(\max r_{ij})$

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Находим матрицу рисков.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий. Максимальный выигрыш в j-м столбце $b_j = \max(a_{ij})$ характеризует благоприятность состояния природы.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

r_{11} = 48100 - 48100 = 0; r_{21} = 48100 - 42100 = 6000; r_{31} = 48100 - 36100 = 12000; r_{41} = 48100 - 30100 = 18000; r_{51} = 48100 - 24100 = 24000;

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

r_{12} = 54100 - 48100 = 6000; r_{22} = 54100 - 54100 = 0; r_{32} = 54100 - 48100 = 6000; r_{42} = 54100 - 42100 = 12000; r_{52} = 54100 - 36100 = 18000;

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

r_{13} = 60100 - 48100 = 12000; r_{23} = 60100 - 54100 = 6000; r_{33} = 60100 - 60100 = 0; r_{43} = 60100 - 54100 = 6000; r_{53} = 60100 - 48100 = 12000;

4. Рассчитываем 4-й столбец матрицы рисков.

r_{14} = 66100 - 48100 = 18000; r_{24} = 66100 - 54100 = 12000; r_{34} = 66100 - 60100 = 6000; r_{44} = 66100 - 66100 = 0; r_{54} = 66100 - 60100 = 6000;

5. Рассчитываем 5-й столбец матрицы рисков.

r_{15} = 72100 - 48100 = 24000; r_{25} = 72100 - 54100 = 18000; r_{35} = 72100 - 60100 = 12000; r_{45} = 72100 - 66100 = 6000; r_{55} = 72100 - 72100 = 0;

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	6000	12000	18000	24000
A_2	6000	0	6000	12000	18000
A_3	12000	6000	0	6000	12000
A_4	18000	12000	6000	0	6000
A_5	24000	18000	12000	6000	0

Выбираем из (24000; 18000; 12000; 18000; 24000) минимальный элемент min=12000

Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Гурвица.

Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение:

$\max(s_i)$

где $s_i = y \min(a_{ij}) + (1-y)\max(a_{ij})$

Рассчитываем s_i.

s_1 = 0,5•48100+(1-0,5)•48100 = 48100

s_2 = 0,5•42100+(1-0,5)•54100 = 48100

s_3 = 0,5•36100+(1-0,5)•60100 = 48100

s_4 = 0,5•30100+(1-0,5)•66100 = 48100

s_5 = 0,5•24100+(1-0,5)•72100 = 48100

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min(a_{ij})$	$\max(a_{ij})$	$y \min(a_{ij}) + (1-y)\max(a_{ij})$
A_1	48100	48100	48100	48100	48100	48100	48100	48100
A_2	42100	54100	54100	54100	54100	42100	54100	48100
A_3	36100	48100	60100	60100	60100	36100	60100	48100
A_4	30100	42100	54100	66100	66100	30100	66100	48100
A_5	24100	36100	48100	60100	72100	24100	72100	48100

Выбираем из (48100; 48100; 48100; 48100; 48100) максимальный элемент max=48100.

Вывод: не важно, какую стратегию выбирать.

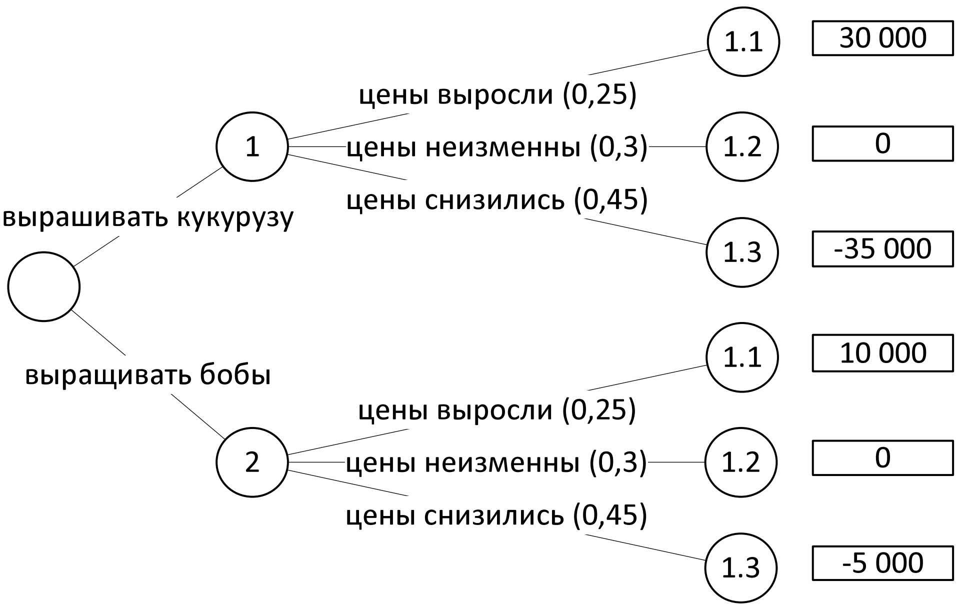
Вывод: в результате решения статистической игры по большинству критериев рекомендовалась стратегия A_3, то есть покупать нужно 2000 билетов.

Задача 2

Решить задачу методом деревьев.
Фермер Мак-кой может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0.25, 0.30 и 0.45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долларов чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10 000 долларов. Если цены останутся неизменными, Мак-кой лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долларов соответственно.
а) Представьте данную задачу в виде дерева решений.
b) Какую культуру следует выращивать Мак-кою?

Решение.

а) Дерево решений.



б) Рассчитываем ожидаемые доходы в точках 1 и 2.

Ожидаемый выигрыш выше при выращивании бобов (250 больше -8250).

Задача 3

Решить задачу методом иерархий.
Кевин и Джун Парки (К и Д) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта A, B, C. Парки согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы (Б), а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

A	К	Д
К	1	2
Д	½	1

$A_к$	Л	Б
Л	1	1/3
Б	3	1

$A_д$	Л	Б
Л	1	4
Б	¼	1

$A_{кл}$	A	B	C
A	1	2	3
B	½	1	2
C	1/3	½	1

$A_{кб}$	A	B	C
A	1	2	½
B	½	1	1/3
C	2	3	1

$A_{дл}$	A	B	C
A	1	4	2
B	¼	1	3
C	½	1/3	1

$A_{дб}$	A	B	C
A	1	½	4
B	2	1	3
C	¼	1/3	1

Решение.

Матрица попарных сравнений площади зеленой лужайки Кевином.

$A_{кл}$	A	B	C
A	1	2	3
B	1/2	1	2
C	1/3	1/2	1

Сначала определяем оценки компонент собственного вектора.

$A_{кл}$	A	B	C	СВ
A	1	2	3	(1+2+3)/3=2
B	1/2	1	2	(1/2+1+2)/3=1,17
C	1/3	1/2	1	(1/3+1/2+1)/3=0,67
				3,78

Получив сумму оценок собственных векторов (=7,74), вычисляем нормализованные оценки вектора приоритета для каждого критерия, разделив значение оценки собственного вектора на эту сумму.

$A_{кл}$	A	B	C	Оценки компонент собственного	Нормализованные оценки вектора приоритета

				вектора	
A	1	2	3	2	0,53
B	1/2	1	2	1,17	0,31
C	1/3	1/2	1	0,67	0,16
				3,78	

Далее находим суммы по столбцам и находим произведение суммы по столбцам и нормализованной оценки вектора приоритета.

$A_{кл}$	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1	2	3	2	0,53
B	1/2	1	2	1,17	0,31
C	1/3	1/2	1	0,67	0,16
	1,83	3,5	6	3,78	
	0,97	1,08	0,97	3,02	

Случайная согласованность матрицы 3 порядка = 0,58.
L_{max} = 3,02.
Ис (индекс согласованности) = (Lmax-n)/(n-1)
Ис = (3,02-3)/(3-1) = 0,011
ОС = 0,011/0,58 = 2%
Величина ОС < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Матрица попарных сравнений площади зеленой лужайки Джун.

$A_{дл}$	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1	4	2	2,33	0,54
B	1/4	1	3	1,42	0,32
C	1/2	1/3	1	0,61	0,14
	1,75	5,33	6,00	4,36	
	0,94	1,73	0,84	3,51	

L_{max} = 3,51.
Ис = (3,51-3)/(3-1) = 0,255
ОС = 0,255/0,58 = 44%
Величина ОС > 10% значит Джун стоит пересмотреть приоритеты.

Матрица попарных сравнений близости к месту работы Кевином.

$A_{кб}$	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1,00	2,00	0,50	1,17	0,31
B	0,50	1,00	0,33	0,61	0,16
C	2,00	3,00	1,00	2,00	0,53
	3,50	6,00	1,83	3,78	
	1,08	0,97	0,97	3,02	

L_{max} = 3,02.
Ис = (3,02-3)/(3-1) = 0,011
ОС = 0,011/0,58 = 2%
Величина ОС < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Матрица попарных сравнений близости к месту работы Джун.

$A_{дб}$	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1,00	0,50	4,00	1,83	0,42
B	2,00	1,00	3,00	2,00	0,46
C	0,25	0,33	1,00	0,53	0,12
	3,25	1,83	8,00	4,36	
	1,37	0,84	0,97	3,18	

L_{max} = 3,18.
Ис = (3,18-3)/(3-1) = 0,088
ОС = 0,088/0,58 = 15%
Величина ОС > 10% значит Джун стоит пересмотреть приоритеты.

Итак, мы получили нормализованные оценки векторов приоритета для Кевина и Джун по каждому критерию.
Теперь определим значимость критериев.
Матрица значимости критериев Кевина.

$A_к$	Л	Б	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
Л	1	1/3	0,67	0,25
Б	3	1	2,00	0,75
	4	1,33	2,67	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.
L_{max} = 2.
Ис = (2-2)/(2-1) = 0
ОС = 0, < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Теперь находим нормализованный вектор значимости вариантов домов с учетом значимости критериев для Кевина:

$$\begin{pmatrix} 0,53\cdot 0,25+0,31\cdot 0,75 \\ 0,31\cdot 0,25+0,16\cdot 0,75 \\ 0,16\cdot 0,25+0,53\cdot 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,365 \\ 0,198 \\ 0,437 \end{pmatrix}$$

Матрица значимости критериев Джун.

$A_к$	Л	Б	Оценки компонент собственного	Нормализованные оценки вектора приоритета

			вектора	
Л	1	4	2,5	0,8
Б	1/4	1	0,63	0,2
	1,25	5,00	3,13	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.
L_{max} = 2.
Ис = (2-2)/(2-1) = 0
ОС = 0, < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Теперь находим нормализованный вектор значимости вариантов домов с учетом значимости критериев для Джун:

$$\begin{pmatrix} 0,54\cdot 0,8+0,42\cdot 0,2 \\ 0,32\cdot 0,8+0,46\cdot 0,2 \\ 0,14\cdot 0,8+0,12\cdot 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,516 \\ 0,348 \\ 0,136 \end{pmatrix}$$

Теперь определим значимость мнений Кевина и Джун.
Матрица значимости мнений Кевина и Джун.

$A_к$	К	Д	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
К	1	2	1,50	0,67
Д	1/2	1	0,75	0,33
	1,50	3,00	2,25	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.
L_{max} = 2.
Ис = (2-2)/(2-1) = 0
ОС = 0, < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Находим нормализованный вектор значимости вариантов домов.

$$\begin{pmatrix} 0,365\cdot 0,67+0,516\cdot 0,33 \\ 0,198\cdot 0,67+0,348\cdot 0,33 \\ 0,437\cdot 0,67+0,136\cdot 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,415 \\ 0,247 \\ 0,338 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение нормализованной оценки – у дома А, следовательно, нужно выбрать его.