Лабораторная работа с решением по численным методам

Задание 1.

1. Определить, какое равенство точнее.
$\sqrt{6{,}8} = 2{,}61$; $12/11 = 1{,}091$.

Решение.

Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков: $a_1 = 2{,}6076809...$, $a_2 = 1{,}090909...$ Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$\alpha_{a_1} = |2{,}6076809 - 2{,}61| \le 0{,}0024$;

$\alpha_{a_2} = |1{,}090909 - 1{,}091| \le 0{,}0001$.

Предельные отношения погрешности составляют:

$$\delta_{a_1} = \frac{\alpha_{a_1}}{a_1} = \frac{0{,}0024}{2{,}61} = 0{,}00092 = 0{,}092\%;$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\alpha_{a_2}}{a_2} = \frac{0{,}0001}{1{,}091} = 0{,}000092 = 0{,}0092\%.$$

Так как $\delta_{a_2} < \delta_{a_1}$, то равенство $12/11 = 1{,}091$ является более точным.

2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
$0{,}12356(\pm 0{,}00036)$.

Решение.

Пусть $0{,}12356(\pm 0{,}00036) = a$. Согласно условию, погрешность $\alpha_a = 0{,}00036 < 0{,}0005$; это означает, что в числе 0,12356 верными в узком смысле являются цифры 0, 1, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив тысячные доли: $a_1 = 0{,}124$.

$\alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0{,}00036 + 0{,}00044 = 0{,}0008$.

Полученная погрешность больше 0,0005; значит нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до трех.

$a_2 = 0{,}12$.

$\alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0{,}00036 + 0{,}00356 = 0{,}00392$.

Так как $\alpha_{a_2} < 0{,}005$, то три оставшиеся цифры верны в узком смысле.

3. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа, если они имеют только верные цифры.

0,678.

Решение.

Так как все цифры числа a=0,678 верны, то $\Delta a = 0{,}001$, $\delta_a = \dfrac{0{,}001}{0{,}678} = 0{,}0015 = 0{,}15\%$.

4. Вычислить и определить погрешности результата.

$y = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, *где* $a = 10{,}82(\pm 0{,}03),\ b = 2{,}786(\pm 0{,}0006),$

$m = 0{,}28(\pm 0{,}006),\ n = 14{,}7(\pm 0{,}06).$

Решение.

Имеем:

$a - b = 10{,}82(\pm 0{,}03) - 2{,}786(\pm 0{,}0006) = 8{,}034(\pm 0{,}0294)$;

$n - a = 14{,}7(\pm 0{,}06) - 10{,}82(\pm 0{,}03) = 3{,}88(\pm 0{,}03)$;

$m = 0{,}28(\pm 0{,}006)$.

$y = \dfrac{\sqrt[3]{8{,}034}}{0{,}28 \cdot 3{,}88} \approx 1{,}844$.

$\delta y = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{0{,}0294}{8{,}034} + \dfrac{0{,}03}{3{,}88} + \dfrac{0{,}006}{0{,}28} = 0{,}0012 + 0{,}0077 + 0{,}0214 = 0{,}0303 = 3{,}03\%$.

$\Delta y = 1{,}844 \cdot 0{,}0303 = 0{,}056$.

Ответ: $y = 1{,}844(\pm 0{,}056)$, $\delta y = 3{,}03\%$.

Задание 2.

1. Отделить корни нелинейного уравнения аналитически $2arctgx - \dfrac{1}{2x^3} = 0$.

Решение.

Обозначим $f(x) = 2arctgx - \dfrac{1}{2x^3}$.Находим производную $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{3}{2x^4}$.

Вычислим корень производной:

$\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{3}{2x^4} = 0$. $D(y): x \neq 0$.

$$\frac{4x^4+3x^2+3}{(1+x^2)2x^4}=0.$$

Уравнение корней не имеет, поэтому для всех x из области определения значение производной больше нуля, следовательно, функция везде возрастает.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

x	-∞	*0*₋	*0*₊	+∞
sign f(x)	–	+	–	+

Так как происходят две перемены знака функции, то уравнение имеет два действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции f(x):

x	*–1*	*0*₋	*0*₊	*1*
sign f(x)	–	+	–	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-1;0]$; $x_2 \in [0;1]$.

2. Отделить корни нелинейного уравнения аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,01. $x^4-18x^2+6=0$.

Решение.

Обозначим $f(x)=x^4-18x^2+6$.Находим производную $f'(x)=4x^3-36x$.

Вычислим корень производной:

$4x^3-36x=0$;

$x(4x^2-36)=0$;

$x_1=0, x_2=-3, x_3=3$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

x	-∞	*–3*	*0*	*3*	+∞
sign f(x)	+	–	+	–	+

Так как происходят четыре перемены знака функции, то уравнение имеет четыре действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции f(x):

x	*–5*	*–4*	*–1*	*0*	*1*	*4*	*5*
sign f(x)	+	–	–	+	–	–	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-5;-4]$; $x_2 \in [-1;0]$, $x_3 \in [0;1]$, $x_4 \in [4;5]$.

Уточним один из корней, например $x_1 \in [-5;-4]$, методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$x^4{}_n$	$-18x^2{}_n$	$f(x_n)$
0	–5	–4	–4,5	410,0625	-364,5	51,5625
1	–4,5	–4	–4,25	326,2539	-325,125	7,128906
2	–4,25	–4	–4,13	290,9378	-307,024	–10,0864
3	–4,25	–4,13	–4,19	308,22	-316,01	–1,79
4	–4,25	–4,19	–4,22	317,14	-320,55	2,59
5	–4,22	–4,19	–4,21	314,14	-319,034	1,11
6	–4,21	–4,19	–4,2	311,17	-317,52	–0,35

Ответ: $x_1 \approx -4,2$.