

Контрольная работа по численным методам с решением

Решение задачи Коши численными методами

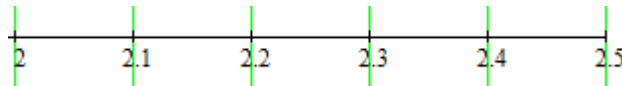
ЗАДАНИЕ

$$f(t, u) = \frac{du}{dt} = \frac{2tu^3}{1-t^2u^2}, \quad t \in [2; 2.5], u^0 = 1.$$

Решить задачу методом Эйлера, методом Адамса, методом Рунге-Кутты.

РЕШЕНИЕ

Метод Эйлера:



$$\text{Шаг } h = \frac{2.5 - 2}{5} = 0.1.$$

$$\text{Алгоритм решения: } \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 = u^0 = 1 \end{cases}.$$

Подставляем значения:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{1 - 2^2 \cdot 1^2} \approx 0.8667.$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0.8667 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 2.1 \cdot 0.8667^3}{1 - 2.1^2 \cdot 0.8667^2} \approx 0.7484.$$

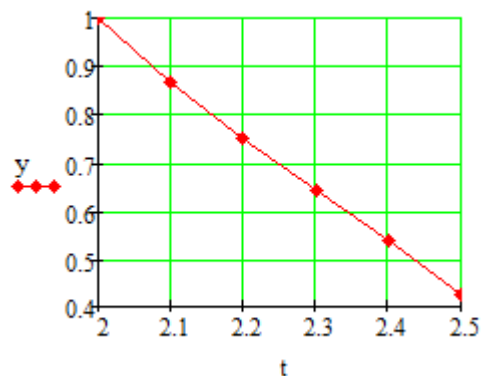
$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 0.7484 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 2.2 \cdot 0.7484^3}{1 - 2.2^2 \cdot 0.7484^2} \approx 0.6406.$$

$$y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = 0.6406 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 2.3 \cdot 0.6406^3}{1 - 2.3^2 \cdot 0.6406^2} \approx 0.5374.$$

$$y_5 = y_4 + hf(t_4, y_4) = 0.5374 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 2.4 \cdot 0.5374^3}{1 - 2.4^2 \cdot 0.5374^2} \approx 0.4251.$$

Решение уравнения:

t	y
2	1
2.1	0.8667
2.2	0.7484
2.3	0.6406
2.4	0.5374
2.5	0.4251



Метод Рунге-Кутты: погрешность $\varepsilon = 0.01$

Разбиваем участок на 2 отрезка, тогда шаг $h = \frac{2.5 - 2}{2} = 0.25$.

$$\text{Алгоритм решения: } \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot h \cdot k_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_2 \end{cases} .$$

1. $t_0 = 2, y_0 = 1, h = 0.25$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{1 - 2^2 \cdot 1^2} \approx -1.3333,$$

$$k_2 = f(t_0 + h, y_0 + hk_1) = f(2.25, 0.6667) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.6667^3}{1 - 2.25^2 \cdot 0.6667^2} \approx -1.0667,$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.5 \cdot h \cdot k_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_2 = \\ &= 1 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.3333) + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.0667) \approx 0.7. \end{aligned}$$

2. $\frac{h}{2} = 0.125$

$$k_1 = -1.3333,$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.125, 0.8333) = \frac{2 \cdot 2.125 \cdot 0.8333^3}{1 - 2.125^2 \cdot 0.8333^2} \approx -1.1515,$$

$$\begin{aligned} y_{1/2} &= y_0 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_2 = \\ &= 1 + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.3333) + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.1515) \approx 0.8447. \end{aligned}$$

Контрольная работа по численным методам выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$k_1 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{12}^{h/2}\right) = f(2.125, 0.8447) = \frac{2 \cdot 2.125 \cdot 0.8447^3}{1 - 2.125^2 \cdot 0.8447^2} \approx -1.1528,$$

$$k_2 = f\left(t_0 + h, y_{12}^{h/2} + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.25, 0.7006) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.7006^3}{1 - 2.125^2 \cdot 0.7006^2} \approx -1.0422,$$

$$\begin{aligned} y_1^{h/2} &= y_{12}^{h/2} + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_2 = \\ &= 0.8447 + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.1528) + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.0422) \approx 0.7075. \end{aligned}$$

Считаем погрешность:

$$\left| \frac{0.7075 - 0.7}{2^p - 1} \right| = \left| \frac{0.7075 - 0.7}{4 - 1} \right| \approx 0.0025 < \varepsilon.$$

3. Следующий этап: полагаем $t_1 = 2.25$, $y_1 = 0.7075$, $h = 0.25$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(2.25, 0.7075) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.7075^3}{1 - 2.25^2 \cdot 0.7075^2} \approx -1.0388,$$

$$k_2 = f(t_1 + h, y_1 + hk_1) = f(2.5, 0.4478) = \frac{2 \cdot 2.5 \cdot 0.4478^3}{1 - 2.5^2 \cdot 0.4478^2} \approx -1.7729,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_2 = \\ &= 1 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.0388) + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.7729) \approx 0.3998. \end{aligned}$$

$$\frac{h}{2} = 0.125$$

$$k_1 = -1.0388,$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.375, 0.5777) = \frac{2 \cdot 2.375 \cdot 0.5777^3}{1 - 2.375^2 \cdot 0.5777^2} \approx -1.0379,$$

$$\begin{aligned} y_{12}^{h/2} &= y_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_2 = \\ &= 0.7075 + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.0388) + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.0379) \approx 0.5777. \end{aligned}$$

Полагаем $t_n = 2.375$, $y_n = 0.5777$.

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f(2.375, 0.5777) = \frac{2 \cdot 2.375 \cdot 0.5777^3}{1 - 2.375^2 \cdot 0.5777^2} \approx -1.0377,$$

Контрольная работа по численным методам выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.5, 0.448) = \frac{2 \cdot 2.5 \cdot 0.448^3}{1 - 2.5^2 \cdot 0.448^2} \approx -1.7677,$$

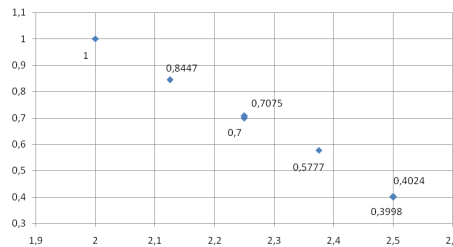
$$y_2^{h/2} = y_n + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_2 =$$

$$= 0.5777 + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.0377) + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.7677) \approx 0.4024.$$

Считаем погрешность:

$$\left| \frac{0.4024 - 0.3998}{2^p - 1} \right| = \left| \frac{0.4024 - 0.3998}{4 - 1} \right| \approx 0.0009 < \varepsilon.$$

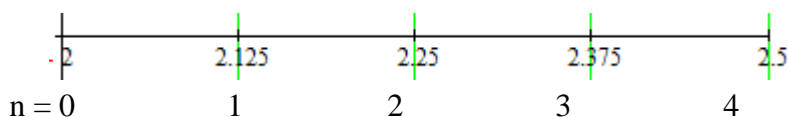
Строим решение:



Метод Адамса:

Разбиваем участок на 4 отрезка, тогда шаг $h = \frac{2.5 - 2}{4} = 0.125$.

Алгоритм решения: $y_n = y_{n-1} + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_{n-2}$.



Для определения стартовых значений используем метод Рунге-Кутты 2-ого порядка. Значение y в точке $0,125$ было найдено ранее:

$$y_1 = y(2.125) = 0.8447.$$

Из условия $y_0 = 1$.

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(2, 1) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{1 - 2^2 \cdot 1^2} \approx -1.3333,$$

$$f_1 = f(t_1, y_1) = f(2.125, 0.8447) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{1 - 2^2 \cdot 1^2} \approx -1.1528,$$

Контрольная работа по численным методам выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_1 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_0 = \\ &= 0.8447 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.1528) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.3333) \approx 0.7119,\end{aligned}$$

$$f_2 = f(t_2, y_2) = f(2.25, 0.7119) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.7119^3}{1 - 2.25^2 \cdot 0.7119^2} \approx -1.037,$$

$$\begin{aligned}y_3 &= y_2 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_2 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_1 = \\ &= 0.7119 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.037) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.1528) \approx 0.5895,\end{aligned}$$

$$f_3 = f(t_3, y_3) = f(2.375, 0.5895) = \frac{2 \cdot 2.375 \cdot 0.5895^3}{1 - 2.375^2 \cdot 0.5895^2} \approx -1.0134,$$

$$\begin{aligned}y_4 &= y_3 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_3 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_2 = \\ &= 0.5895 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.0134) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.037) \approx 0.4643.\end{aligned}$$

t	y
2	1
2.125	0.8447
2.25	0.7119
2.375	0.5895
2.5	0.4643

