МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
РГР№8.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

11	$y\left(4+e^{x}\right)dy-e^{x}dx=0.$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$y\left(4+e^{x}\right)dy-e^{x}dx=0,$

$y\left(4+e^{x}\right)dy=e^{x}dx,$

$ydy=\dfrac{e^{x}dx}{4+e^{x}}.$

Интегрируем обе части:

$\int ydy=\int\dfrac{e^{x}dx}{4+e^{x}}$

Вычислим отдельно: $\int\dfrac{e^{x}dx}{4+e^{x}}=\left|t=e^{x},\ dt=e^{x}dx\right|=\int\dfrac{dt}{4+t}=\ln|4+t|+C=\ln|4+e^{x}|+C..$

Получаем: $\dfrac{1}{2}y^{2}=\ln|4+e^{x}|+C$.

Общий интеграл: $\dfrac{1}{2}y^{2}-\ln|4+e^{x}|=C$.

Задание 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

11	$y'=\dfrac{x^{2}+xy-y^{2}}{x^{2}-2xy}.$

Решение. Это однородное уравнение, поэтому делаем замену:
$z=y/x,\quad y=zx,\quad y'=z'x+z$. Получаем:

$$z'x+z=\frac{x^2+xzx-z^2x^2}{x^2-2xzx},$$

$$z'x+z=\frac{1+z-z^2}{1-2z},$$

$$z'x=\frac{1+z-z^2}{1-2z}-z,$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1+z-z^2-z+2z^2}{1-2z},$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1+z^2}{1-2z},$$

$$\frac{(1-2z)dz}{(1+z^2)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{(1-2z)dz}{(1+z^2)}=\int\frac{dx}{x}.$$

Вычисляем отдельно:

$$\int\frac{(1-2z)dz}{(1+z^2)}=-\int\frac{2zdz}{(1+z^2)}+\int\frac{dz}{(1+z^2)}=-\ln|1+z^2|+\operatorname{arctg} z+C.$$

Получаем:

$$-\ln|1+z^2|+\operatorname{arctg} z=\ln|x|+C,$$

$$-\ln|1+(y/x)^2|+\operatorname{arctg}(y/x)-\ln|x|=C.$$

Общий интеграл: $-\ln|1+(y/x)^2|+\operatorname{arctg}(y/x)-\ln|x|=C.$.

Задание 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

11	$y'=\frac{x-2y+3}{-2x-2}.$

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ -2x-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1, \\ x=-1. \end{cases}$$

Сделаем замену в данном уравнении следующего вида:

$x=t-1$, $y=z+1$, $z=z(t)$, $z'=y'$.

Получаем уравнение:

$$z' = \frac{t-1-2z-2+3}{-2t+2-2},$$

$$z' = \frac{t-2z}{-2t},$$

$$z' = -\frac{1}{2} + \frac{z}{t}.$$

Делаем замену: $u = z/t,\ z = ut,\ z' = u't + u$. Получаем:

$$u't + u = -\frac{1}{2} + u,$$

$$u't = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{du}{dt}t = -\frac{1}{2},$$

$$du = -\frac{1}{2}\frac{dt}{t}.$$

Интегрируем:

$$\int du = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},$$

$$u = -\frac{1}{2}\ln|t| + C.$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$u = -\frac{1}{2}\ln|t| + C,$$

$$\frac{z}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C,$$

$$z = -\frac{1}{2}t\ln|t| + Ct,$$

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x+1)\ln|x+1| + C(x+1),$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)\ln|x+1| + C(x+1) + 1.$$

Получили общее решение: $y = -\frac{1}{2}(x+1)\ln|x+1| + C(x+1) + 1.$

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения.

11	$y' - \frac{(2x-5)y}{x^2} = 5,\quad y(2) = 4.$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение. Сначала решим соответствующее однородное:

$$y' - \frac{(2x-5)y}{x^2} = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-5)y}{x^2},$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x-5)}{x^2}dx.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(2x-5)}{x^2}dx,$$
$$\ln|y| = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)dx,$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{5}{x} + \ln|C|,$$
$$y = Cx^2 e^{5/x}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения будем искать в виде: $y = C(x)x^2 e^{5/x}$.

Производная $y' = C'(x)x^2 e^{5/x} + C(x)2xe^{5/x} + C(x)x^2 e^{5/x}\left(-\frac{5}{x^2}\right)$. Подставляем:

$$C'(x)x^2e^{5/x} + C(x)2xe^{5/x} + C(x)x^2e^{5/x}\left(-\frac{5}{x^2}\right) - \frac{(2x-5)}{x^2}C(x)x^2e^{5/x} = 5,$$
$$C'(x)x^2e^{5/x} + C(x)2xe^{5/x} - 5C(x)e^{5/x} - \frac{2}{x}C(x)x^2e^{5/x} + 5C(x)e^{5/x} = 5,$$
$$C'(x)x^2e^{5/x} = 5,$$
$$C'(x) = \frac{5}{x^2}e^{-5/x}.$$

Интегрируем и получаем:

$$C(x) = \int \frac{5}{x^2}e^{-5/x}dx = \int e^{-5/x}d(-5/x) = e^{-5/x} + \overline{C}.$$

Общее решение уравнения принимает вид: $y = \left(e^{-5/x} + \overline{C}\right)x^2e^{5/x}$.

Найдем постоянную $\overline{C}$ из начального условия:

$y(2) = \left(e^{-5/2} + \overline{C}\right)4e^{5/2} = 4 + 4\overline{C}e^{5/2} = 4,$ поэтому $\overline{C} = 0$.

Искомое частное решение: $y = x^2$.

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения.

11	$8(4y^3 + xy - y)y' = 1, \quad y\|_{x=0} = 0.$

Решение. Если выбрать в качестве неизвестной функции $x = x(y)$, то уравнение примет вид:

$8\left(4y^3+xy-y\right)=x', \quad x\big|_{y=0}=0$ или $x'-8xy=32y^3-8y, \quad x\big|_{y=0}=0.$

Это линейное неоднородное уравнение. Сначала решаем соответствующее однородное:
$x'-8xy=0,$

$\frac{dx}{dy}=8xy,$

$\frac{dx}{x}=8ydy,$

$\int\frac{dx}{x}=\int 8ydy,$

$\ln|x|=4y^2+\ln|C|,$

$x=Ce^{4y^2}.$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде: $x=C(y)e^{4y^2}$.
Производная $x'=C'(y)e^{4y^2}+C(y)8ye^{4y^2}$. Подставляем:
$C'(y)e^{4y^2}+C(y)8ye^{4y^2}-8C(y)e^{4y^2}y=32y^3-8y,$

$C'(y)e^{4y^2}=32y^3-8y,$

$C'(y)=\left(32y^3-8y\right)e^{-4y^2}.$

Интегрируем:

$$C(y)=\int\left(32y^3-8y\right)e^{-4y^2}dy=\int-8y\left(-4y^2+1\right)e^{-4y^2}dy=\left|\begin{array}{c}\textit{замена}\\ t=-4y^2,\ dt=-8ydy\end{array}\right|=$$

$$=\int(t+1)e^t dt=\left|\begin{array}{ll}u=t+1 & du=dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\end{array}\right|=(t+1)e^t-\int e^t dt=te^t+e^t-e^t+\overline{C}=te^t+\overline{C}=-4y^2e^{-4y^2}+\overline{C}.$$

Получаем общее решение: $x=\left(-4y^2e^{-4y^2}+\overline{C}\right)e^{4y^2}=-4y^2+\overline{C}e^{4y^2}$.

Осталось найти постоянную $\overline{C}$ из начального условия: $x(0)=0+\overline{C}e^0=0$, откуда $\overline{C}=0$.

Искомое частное решение: $x=-4y^2$.

Задание 6. Найти решение задачи Коши.

11	$2xy'-3y=-\left(5x^2+3\right)y^3, \quad y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Решение. Это уравнение Бернулли, поэтому решение будем искать в виде произведения двух функций: $y=uv$, производная $y'=u'v+uv'$. Подставляем:

$2x(u'v+uv')-3vu=-\left(5x^2+3\right)u^3v^3,$

$2xu'v+2xuv'-3vu=-\left(5x^2+3\right)u^3v^3,$

$2xu'v+u(2xv'-3v)=-\left(5x^2+3\right)u^3v^3.$ (*)

Выберем в качестве функции v частное решение уравнения:

$$2xv'-3v=0,$$

$$2x\frac{dv}{dx}=3v,$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{3dx}{2x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{3dx}{2x},$$

$$\ln|v|=\frac{3}{2}\ln|x|,$$

$$v=x^{3/2}.$$

Подставляем найденную функцию $v=x^{3/2}$ в уравнение (*). Получаем:

$$2xu'x^{3/2}=-\left(5x^2+3\right)u^3x^{9/2},$$

$$2u'=-\left(5x^2+3\right)u^3x^2,$$

$$2\frac{du}{dx}=-\left(5x^2+3\right)u^3x^2,$$

$$-2\frac{du}{u^3}=\left(5x^2+3\right)x^2dx.$$

Интегрируем:

$$-2\int\frac{du}{u^3}=\int\left(5x^2+3\right)x^2dx,$$

$$\frac{1}{u^2}=x^5+x^3+C,$$

$$u^2=\frac{1}{x^5+x^3+C}.$$

Тогда общее решение принимает вид:

$$y=vu=\pm\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^5+x^3+C}}.$$

Найдем постоянную C из начального условия $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Получаем: $y(1)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+1+C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $C=0$ и искомое частное решение

$$y=\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^5+x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Задание 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

11	$\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0.$

Решение. Это уравнение в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\frac{1}{x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-2y\right)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

Поэтому можно представить уравнение как полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ для которой справедливо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x},\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-2y.\end{cases}$$

Восстановим эту функцию $U(x,y)$.

Интегрируем второе уравнение по y и получаем:

$$U=\int\frac{\partial U}{\partial y}dy=\int\left(-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-2y\right)dy=-\sin\frac{y}{x}-y^2+\varphi(x).$$

Теперь дифференцируем это выражение по x и приравниваем к $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$:

$$-\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)-0+\varphi'(x)=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x},$$

$$\varphi'(x)=0,$$

$$\varphi(x)=C.$$

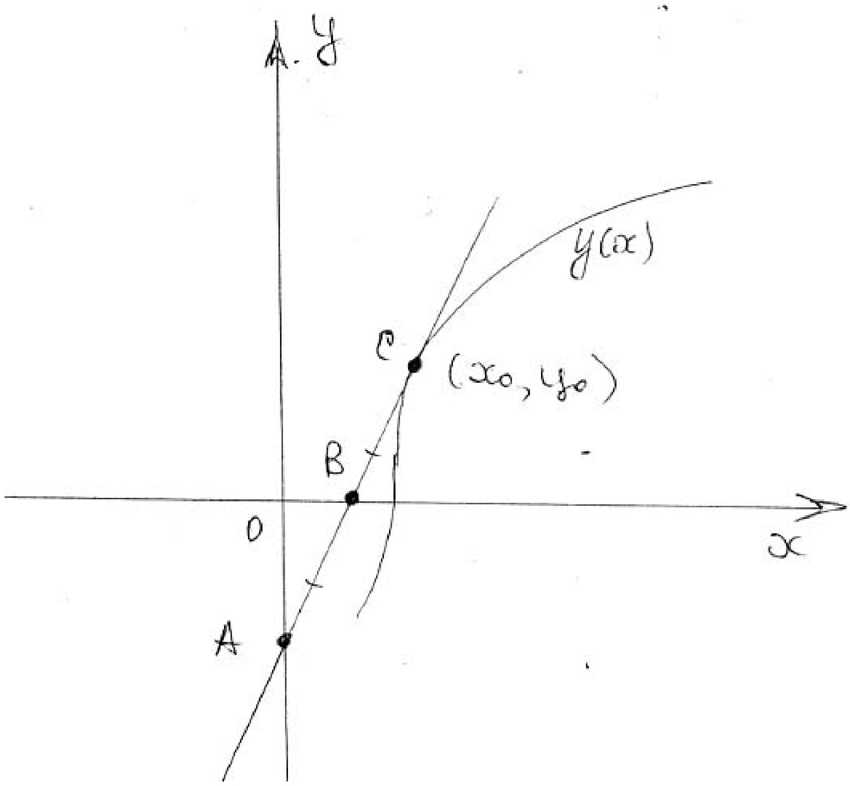
Таким образом, $U=-\sin\frac{y}{x}-y^2+C.$

Общий интеграл уравнения: $\sin\frac{y}{x}+y^2=C.$

Задание 8(3). Найти линию, проходящую через точку M_0, если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

11	$M_0(2,-1),\quad a:b=1:1.$

Решение. Сделаем схематический чертеж.



По условию задачи имеем, что $AB = BC$, где $C(x_0, y_0)$ - точка искомой кривой, B и A - точки пересечения касательной $y = y_0 + y'(x - x_0)$ с осями абсцисс и ординат. Найдем их координаты.

B, $y = 0$, поэтому $x = -\frac{1}{y'} y_0 + x_0$.

A, $x = 0$, поэтому $y = y_0 - y' x_0$.

Тогда $AB^2 = \left(-\frac{1}{y'} y_0 + x_0\right)^2 + \left(y_0 - y' x_0\right)^2$, $BC^2 = \left(-\frac{1}{y'} y_0 + x_0 - x_0\right)^2 + y_0^2$.

Приравниваем:

$$\frac{1}{y'^2}\left(-y_0 + y' x_0\right)^2 + \left(y_0 - y' x_0\right)^2 = \left(-\frac{1}{y'} y_0\right)^2 + y_0^2,$$

$$\frac{1}{y'^2}\left(-y_0 + y' x_0\right)^2 + \left(y_0 - y' x_0\right)^2 = \frac{1}{y'^2} y_0{}^2 + y_0^2,$$

$$\left(\frac{1}{y'^2} + 1\right)\left(-y_0 + y' x_0\right)^2 = \left(\frac{1}{y'^2} + 1\right) y_0^2,$$

$$-y_0 + y' x_0 = \pm y_0.$$

Получаем два уравнения:

$y' x - 2y = 0$ и $y' x = 0$.

Последнее уравнение не подходит по смыслу задачи, поэтому рассматриваем и решаем первое:

$y'x-2y=0,$

$\frac{dy}{dx}x=2y,$

$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x},$

$\ln|y|=2\ln|x|+\ln|C|,$

$y=Cx^2.$

Получили семейство парабол $y=Cx^2$. Найдем C из условия, что линия проходит через точку $M_0(2,-1)$. Получаем: $-1=4C,\ C=-1/4$, уравнение кривой $y=-\frac{1}{4}x^2$.

Задание 9. Найти решение задачи Коши.

11	$y''y^3+36=0,\quad y(0)=3,\quad y'(0)=2.$

Решение. Так как в уравнении не присутствует x, вводим параметр $y'=p$, $y''=p'p$, $p=p(y)$ и получаем:

$p'py^3+36=0,$

$\frac{dp}{dy}py^3=-36,$

$pdp=-36\frac{dy}{y^3}.$

Интегрируем:

$\int pdp=-36\int\frac{dy}{y^3},$

$\frac{1}{2}p^2=18\frac{1}{y^2}+C,$

$p^2=\frac{36}{y^2}+2C.$

Возвращаемся к y: $y'^2=\frac{36}{y^2}+2C$. Найдем постоянную C из начальных условий:

$4=\frac{36}{3^2}+2C,\ C=0$.

Приходим к уравнению $y'=\frac{6}{y}$. Интегрируем его.

$y' = \frac{6}{y}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$,

$ydy = 6dx$,

$\int ydy = \int 6dx$,

$y^2 = 12x + C$.

Найдем C из начального условия:

$3^2 = 0 + C$, $C = 9$.

Получаем решение $y = \sqrt{12x+9}$.

Задание10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

11	$y''' + y'' = 5x^2 - 1$

Решение. Это линейное уравнение третьего порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение: $y''' + y'' = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^3 + k^2 = 0$,

$k^2(k+1) = 0$,

$k_{1,2} = 0$, $k_3 = -1$.

Общее решение однородного уравнения $y_{о.о.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:

$y_{ч.н.} = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$ (умножили на x^2, так как $k = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2).

Производные:

$y_{ч.н.}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$,

$y_{ч.н.}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$,

$y_{ч.н.}''' = 24Ax + 6B$.

Подставляем:

$24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = 5x^2 - 1$.

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x и получаем:

$$\begin{cases} 6B + 2C = -1, \\ 24A + 6B = 0, \\ 12A = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9/2, \\ B = -5/3, \\ A = 5/12; \end{cases}$$

То есть $y_{ч.н.} = \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения равно:

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2.$$

Задание 11. Найти общее решение дифференциального уравнения.

11	$y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}$

Решение. Это линейное уравнение третьего порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 3y' + 2y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^3 - 3k + 2 = 0,$

$k_{1,2} = 1,\ k_3 = -2.$

Общее решение однородного уравнения $y_{о.о.} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:

$y_{ч.н.} = (Ax+B)e^{2x}$. Вычисляем производные:

$y_{ч.н.}' = (A + 2Ax + 2B)e^{2x}$,

$y_{ч.н.}'' = (2A + 2A + 4Ax + 4B)e^{2x} = (4A + 4Ax + 4B)e^{2x}$,

$y_{ч.н.}''' = (4A + 8A + 8Ax + 8B)e^{2x} = (12A + 8Ax + 8B)e^{2x}$.

Подставляем:

$(12A + 8Ax + 8B)e^{2x} - 3(A + 2Ax + 2B)e^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x} = (4x+9)e^{2x}$,

$12A + 8Ax + 8B - 3A - 6Ax - 6B + 2Ax + 2B = 4x + 9$,

$9A + 4Ax + 4B = 4x + 9$,

Откуда $A = 1$, $B = 0$, $y_{ч.н.} = xe^{2x}$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения равно:

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + xe^{2x}.$$

Задание 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

11	$y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$

Решение. Это линейное уравнение второго порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение: $y'' + 2y' + 5y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2+2k+5=0,$

$D=4-20=-16,$

$k_1=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i,\ k_2=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i.$

Общее решение однородного уравнения $y_{o.o.}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:

$y_{ч.н.}=A\sin x+B\cos x$. Вычисляем производные:

$y_{ч.н.}'=A\cos x-B\sin x$,

$y_{ч.н.}''=-A\sin x-B\cos x$.

Подставляем:

$-A\sin x-B\cos x+2(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=-2\sin x$,

$-A\sin x-B\cos x+2A\cos x-2B\sin x+5A\sin x+5B\cos x=-2\sin x$,

$4A\sin x+4B\cos x+2A\cos x-2B\sin x=-2\sin x$,

$2A\sin x+2B\cos x+A\cos x-B\sin x=-\sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ справа и слева.

$$\begin{cases}2A-B=-1,\\ 2B+A=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4A-2B=-2,\\ 2B+A=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=-2/5,\\ B=1/5.\end{cases}$$

Таким образом, $y_{ч.н.}=-\dfrac{2}{5}\sin x+\dfrac{1}{5}\cos x$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения равно:

$y_{о.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{2}{5}\sin x+\dfrac{1}{5}\cos x$.

Задание 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

11	$y''+16y=16\cos 4x-16e^{4x}$

Решение. Это линейное уравнение второго порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение: $y''+16y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2+16=0,$

$k_1=-4i,\ k_2=4i.$

Общее решение однородного уравнения $y_{o.o.}=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

1) $f_1=16\cos 4x$, тогда $y_1=x(A\sin 4x+B\cos 4x)$. Вычисляем производные:

$y_1'=(A\sin 4x+B\cos 4x)+x(4A\cos 4x-4B\sin x)$,

$y_1'' = (8A\cos 4x - 8B\sin 4x) + x(-16A\sin 4x - 16B\cos 4x)$

Подставляем:

$(8A\cos 4x - 8B\sin 4x) + x(-16A\sin 4x - 16B\cos 4x) + 16x(A\sin 4x + B\cos 4x) = 16\cos 4x,$

$8A\cos 4x - 8B\sin 4x = 16\cos 4x,$

$A\cos 4x - B\sin 4x = 2\cos 4x,$

$A = 2,\ B = 0,$

Частное решение $y_1 = 2x\sin 4x$.

2) $f_2 = -16e^{4x}$, тогда $y_2 = Ae^{4x}$. Вычисляем производные: $y_2' = 4Ae^{4x}$, $y_2'' = 16Ae^{4x}$.

Получаем:

$16Ae^{4x} + 16Ae^{4x} = -16e^{4x},$

$2Ae^{4x} = -e^{4x},$

$A = -1/2,$

Частное решение $y_2 = -\dfrac{1}{2}e^{4x}$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения равно:

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_1 + y_2 = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + 2x\sin 4x - \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Задание 14. Найти решение задачи Коши.

11	$y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

Решение. Это линейное уравнение второго порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение: $y'' + 6y' + 8y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2 + 6k + 8 = 0,$

$k_1 = -2,\ k_2 = -4.$

Общее решение однородного уравнения $y_{о.о.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-4x}$, где функции $C_1(x),\ C_2(x)$ найдем из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-4x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 4C_2'(x)e^{-4x} = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-4x} = 0, \\ C_1'(x)e^{-2x} + 2C_2'(x)e^{-4x} = -\dfrac{2e^{-2x}}{2+e^{2x}}; \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое и получаем:

$$C_2'(x)e^{-4x} = -\frac{2e^{-2x}}{2+e^{2x}},$$

$$C_2'(x) = -\frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}.$$

Подставляем в первое уравнение и находим:

$$C_1'(x)e^{-2x} - \frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}e^{-4x} = 0,$$

$$C_1'(x) = \frac{2}{2+e^{2x}}.$$

Интегрируем:

$$C_2(x) = -\int \frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}dx = \left| \begin{matrix} t = e^{2x}, \\ dt = 2e^{2x}dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|t+2| + \widehat{C}_2 = -\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_2.$$

$$C_1(x) = \int \frac{2}{2+e^{2x}}dx = \left| \begin{matrix} t = e^{2x}, \ x = 1/2\ln t, \\ dx = \dfrac{dt}{2t} \end{matrix} \right| = \int \frac{2}{(2+t)2t}dt = \int \frac{1}{(2+t)t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t+2| + \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}| - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_1 =$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_1.$$

Получаем решение:

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_1\right)e^{-2x} + \left(-\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_2\right)e^{-4x}.$$

Чтобы найти неизвестные постоянные, используем начальные условия. Производная от решения:

$$y' = -2\left(x - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_1\right)e^{-2x} - 4\left(-\ln|e^{2x}+2| + \widehat{C}_2\right)e^{-4x} +$$

$$+\left(\frac{2}{2+e^{2x}}\right)e^{-2x} + \left(-\frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}\right)e^{-4x}.$$

Подставляем:

$$\begin{cases} y(0) = \left(-\frac{1}{2}\ln|3| + \widehat{C}_1\right) + \left(-\ln|3| + \widehat{C}_2\right) = 0, \\ y'(0) = -2\left(-\frac{1}{2}\ln|3| + \widehat{C}_1\right) - 4\left(-\ln|3| + \widehat{C}_2\right) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \frac{3}{2}\ln|3|, \\ y'(0) = -2\widehat{C}_1 + \ln|3| - 4\widehat{C}_2 + 4\ln|3| = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \dfrac{3}{2}\ln|3|, \\ -\widehat{C}_1 - 2\widehat{C}_2 = -\dfrac{5}{2}\ln|3|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{C}_2 = \ln|3|, \\ \widehat{C}_1 = \dfrac{1}{2}\ln|3|. \end{cases}$$

Получаем решение:

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + \frac{1}{2}\ln|3| \right) e^{-2x} + \left(-\ln|e^{2x}+2| + \ln|3| \right) e^{-4x}$$