Аналитическая геометрия
Решение контрольной работы

Задача 1. Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если (-1,0) – точки пересечения его диагоналей.

Решение. Пусть сторона AB квадрата $ABCD$ лежит на прямой $x+3y-5=0$. Тогда сторона CD лежит на прямой $x+3y-m=0$ (m - некоторое число), так как стороны параллельны. Две другие стороны AC и BD будут лежать на прямых вида $3x-y+n_1=0$ и $3x-y+n_2=0$, которые перпендикулярны прямым $x+3y-5=0$ и $x+3y-m=0$.

Так как $ABCD$ - квадрат, расстояние от точки пересечения диагоналей $A(-1,0)$ до всех его сторон, одинаково. Найдем его:

$$d=\frac{|-1+3\cdot 0-5|}{\sqrt{1+9}}=\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Теперь найдем неизвестные m,n_1,n_2, учитывая равенство расстояний от A до прямых:

$d=\frac{|-1+3\cdot 0-m|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|-1-m|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$, откуда $|-m-1|=6$, значит, $m=5$ (прямая AB) или $m=-7$, то есть уравнение прямой CD имеет вид $x+3y+7=0$.

$d=\frac{|-1\cdot 3+-1\cdot 0+n|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|n-3|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$, откуда $|n-3|=6$, значит, $n_1=9$ и $n_2=-3$, стороны AC и BD будут лежать на прямых $3x-y+9=0$ и $3x-y-3=0$.

Искомые стороны: $x+3y+7=0$, $3x-y+9=0$ и $3x-y-3=0$.

Задача 2. Дан параллелограмм ABCD, три вершины которого $A(-3,5,-4)$, $B(-5,6,2)$, $C(3,-5,-2)$. Найти четвертую вершину и острый угол параллелограмма.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{AB}=\{-5-(-3),6-5,2-(-4)\}=\{-2,1,6\}$. Так как $ABCD$ - параллелограмм, то $\overline{AB}=\overline{CD}$, то есть $\overline{CD}=\{-2,1,6\}$.

По определению

$$\overline{CD}=\{x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C\}=\{x_D-3,y_D-(-5),z_D-(-2)\}=$$
$$=\{x_D-3,y_D+5,z_D+2\}=\{-2,1,6\},$$

поэтому

$$x_D-3=-2,\ x_D=1,$$
$$y_D+5=1,\ y_D=-4,$$
$$z_D+2=6,\ z_D=4.$$

Получаем координаты четвертой вершины $D(1,-4,4)$.

Найдем острый угол параллелограмма.

Найдем угол α между ребрами AB и AC, для чего вычислим координаты вектора $\overline{AC}$:
$\overline{AC} = \{3-(-3), -5-5, -2-(-4)\} = \{6, -10, 2\}$ и воспользуемся формулой скалярного произведения:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{-2\cdot 6 + 1\cdot(-10) + 6\cdot 2}{\sqrt{4+1+36}\cdot\sqrt{36+100+4}} = \frac{-12-10+12}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{140}} = \frac{-10}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{140}},$$

Откуда $\alpha = \arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{140}}\right) \approx 97,584^0$.

Поскольку это тупой угол, искомый острый угол параллелограмма равен
$\beta = 180^0 - \alpha = 180^0 - 97,584^0 = 82,416^0 \approx 82^0$.

Ответ: $D(1,-4,4)$, $\beta \approx 82^0$.

Задача 3. Найти угол между плоскостью α и прямой, проходящей через начало координат и точку $M(-2,4,-3)$. Вычислить расстояние от точки M до плоскости α: $x+5y+7z-2=0$.

Решение. Так как прямая проходит через начало координат и точку $M(-2,4,-3)$, ее направляющий вектор равен $\overline{a} = \overline{OM} = \{-2-0, 4-0, -3-0\} = \{-2, 4, -3\}$.
Так как уравнение плоскости α имеет вид $x+5y+7z-2=0$, то вектор нормали к плоскости, это $\overline{n} = \{1,5,7\}$.

Теперь можно найти угол β между плоскостью α и прямой по формуле:

$$\sin\beta = \frac{\overline{a}\cdot\overline{n}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|} = \frac{-2\cdot 1 + 4\cdot 5 - 3\cdot 7}{\sqrt{4+16+9}\sqrt{1+25+49}} = \frac{-2+20-21}{\sqrt{29}\sqrt{75}} = \frac{-3}{\sqrt{29}\sqrt{75}},$$

откуда $\beta = \arcsin\left(\frac{-3}{\sqrt{29}\sqrt{75}}\right) \approx -3,688^0$

Вычислим расстояние от точки $M(-2,4,-3)$ до плоскости α ($x+5y+7z-2=0$) по формуле:

$$d = \frac{|x_M + 5y_M + 7z_M - 2|}{|\overline{n}|} = \frac{|-2+5\cdot 4+7\cdot(-3)-2|}{\sqrt{75}} = \frac{|-2+20-21-2|}{\sqrt{75}} = \frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\beta \approx 3,688^0$, $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 4. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую J.
$M(-4,5,-2)$, $J: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{2}$.

Решение. Найдем проекцию точки $M(-4,5,-2)$ на прямую $J: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{2}$.

Чтобы найти проекцию точки на прямую, проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную данной прямой, используя ее направляющий вектор, который будет вектором нормали к плоскости: $\overline{a}=\{1,2,2\}=\overline{n}$. Получаем:
$1(x+4)+2(y-5)+2(z+2)=0$,
$x+4+2y-10+2z+4=0$,
$x+2y+2z-2=0$

Тогда искомая проекция (точка N) – это результат пересечения прямой и плоскости. Чтобы найти это пересечение, запишем параметрические уравнения

$$J:\begin{cases} x=t-3 \\ y=2t+4 \\ z=2t+2 \end{cases}$$

и подставим их в уравнение плоскости:
$t-3+2(2t+4)+2(2t+2)-2=0$,
$t-3+4t+8+4t+4-2=0$,
$9t=-7$,
$t=-7/9$,

$$N:\begin{cases} x=-7/9-3=-34/9 \\ y=-14/9+4=22/9 \\ z=-14/9+2=4/9 \end{cases}$$

$N(-34/9,22/9,4/9)$ - проекция точки M на прямую J.

Тогда уравнение перпендикуляра – это уравнение прямой MN:

$$\frac{x-x_M}{x_N-x_M}=\frac{y-y_M}{y_N-y_M}=\frac{z-z_M}{z_N-z_M},$$

$$\frac{x+4}{-34/9+4}=\frac{y-5}{22/9-5}=\frac{z+2}{4/9+2},$$

$$\frac{x+4}{-34+36}=\frac{y-5}{22-45}=\frac{z+2}{4+18},$$

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{-23}=\frac{z+2}{22}.$$

Ответ: $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-5}{-23}=\dfrac{z+2}{22}$

Задача 5. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4;0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

Решение. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка искомой линии. Расстояние от нее до начала координат равно $F_1=\sqrt{x^2+y^2}$, а до точки A (-4;0) $F_2=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$. По условию, точка $M(x,y)$ отстоит от точки $A(-4;0)$ втрое дальше, чем от начала координат, то есть $3F_1=F_2$. Получаем:

$$3\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем выражение:

$$9\left(x^2+y^2\right)=\left(x+4\right)^2+y^2,$$

$$9x^2+9y^2=x^2+8x+16+y^2,$$

$$8x^2-8x+8y^2=16,$$

$$x^2-x+y^2=2,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4},$$

$$\frac{\left(x-1/2\right)^2}{\left(3/2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(3/2\right)^2}=1.$$

Получили уравнение окружности с центром в точке $M\left(1/2;0\right)$ и радиусом $R=3/2$.

Задача 6. Найти точку, симметричную точке $M(2,-1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$.

Решение. Найдем прямую, проходящую через точку $M(2,-1)$ перпендикулярно прямой $x-2y+3=0$. Прямая $x-2y+3=0$ имеет угловой коэффициент $k=\frac{1}{2}$, поэтому уравнение перпендикуляра:

$$y-y_M=-\frac{1}{k}(x-x_M),$$

$$y+1=-2(x-2),$$

$$y=-2x+3.$$

Найдем точку пересечения прямых (проекцию точки на прямую):

$$\begin{cases}x-2y+3=0,\\ y+2x-3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-4y+6=0,\\ y+2x-3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y+9=0, \\ y+2x-3=0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y=1,8, \\ x=0,6. \end{cases}$$
Точка $P(0,6;\ 1,8)$ - середина отрезка MM', где $M'(x',-2x'+3)$ (лежит на перпендикуляре) - искомая симметричная точка.
По формуле середины отрезка:
$$\begin{cases} 0,6=\dfrac{x'+2}{2} \\ 1,8=\dfrac{-2x'+3-1}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1,2=x'+2, \\ 3,6=-2x'+2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} -0,8=x', \\ 1,6=-2x'; \end{cases}$$
Получили координаты $M'(x',-2x'+3)=(-0,8;\ 4,6)$

Задача 7. Даны координаты точки A и уравнение прямой l.
Требуется:
1) составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l;
2) составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l;
3) Найти расстояние от точки A до прямой l;
4) Изобразить на чертеже точку A и прямые $l,\ l_1,\ l_2$.

$A(-6;1)$, $l: 2x-4y-1=0$.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $l: 2x-4y-1=0$:
$$2x-4y-1=0,$$
$$4y=2x-1,$$
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$$
Получаем, что угловой коэффициент равен $k=\dfrac{1}{2}$.

Составим уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l. Так как прямая $l_1 \parallel l$, ее угловой коэффициент также равен $k=\dfrac{1}{2}$. Получаем уравнение:
$$y-y_A=k(x-x_A),$$

$y-1=\frac{1}{2}(x+6),$

$y=\frac{1}{2}x+3+1,$

$y=\frac{1}{2}x+4.$

Составим уравнение прямой l_2, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l. Так как прямая $l_2 \perp l$, то ее угловой коэффициент равен $-\frac{1}{k}=-2$. Получаем уравнение:

$y-y_A=-\frac{1}{k}(x-x_A)$,

$y-1=-2(x+6),$

$y=-2x-12+1,$

$y=-2x-11.$

Найдем расстояние от точки A до прямой l по формуле:

$$d=\frac{|2x_A-4y_A-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|2(-6)-4-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|-12-5|}{\sqrt{20}}=\frac{17}{2\sqrt{5}}\approx 3,8.$$

Изобразим на чертеже точку A и прямые l, l_1, l_2 (синим, красным, коричневым).