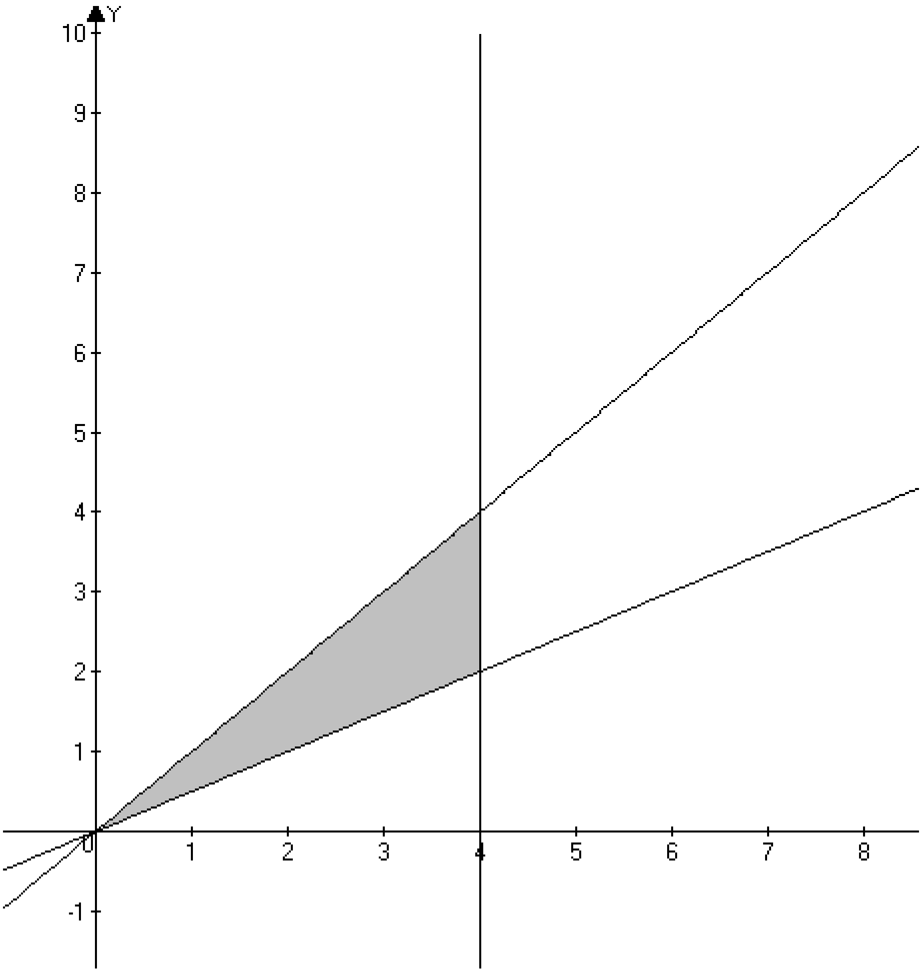
# Контрольная работа №2 по матанализу
# Для студентов факультета ИСиКТ
# Вариант №7

**Задание 7.** Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (x^3 + y^3)dxdy, D: x - 2y = 0, x - y = 0, x = 4$$

**Решение**




$$\iint\limits_D (x^3 + y^3)dxdy = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{x} \left(x^3 + y^3\right) dxdy = \int_0^4 \left[ yx^3 + \frac{y^4}{4} \right]_{\frac{x}{2}}^{x} dx = \int_0^4 \left[ x^4 + \frac{x^4}{4} - \frac{x}{2}x^3 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4} \right] dx =$$

$$= \int_0^4 \left[ \frac{49}{64} x^4 \right] dx = \left[ \frac{49}{320} x^5 \right]_0^4 = \frac{49}{320} * 4^5 = \frac{784}{5}$$

**Задание 8.** Вычислить многократный интервал:

$$\iiint\limits_\Omega x^2 y^2 z dxdydz$$

$\Omega$ лежит в первом октанте и ограничена единичной сферой $x^2+y^2+z^2=1$ координатными плоскостями $x=0, y=0, z=0$.

**Решение**

Перейдем к сферическим координатам

$x = r\cos a\cos b$

$y = r\sin a\cos b$

$z = r\sin b$

$I = r^2\cos b$

$x^2y^2z = (r\cos a\cos b)^2(r\sin a\cos b)^2 r\sin b = r^5\cos^2 a\sin^2 a\cos^4 b\sin b$

Тогда,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(r^5\cos^2 a\sin^2 a\cos^4 b\sin b\right)r^2\cos b\,dadbdr =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^7\sin^2 2a\cos^5 b\sin b\,dadbdr = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 r^7dr\right]\times\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2a\,da\right]\times\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 b\sin b\,db\right]=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{r^8}{8}\right]_0^1\times\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4a}{2}da\right]\times\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 b\,d\cos b\right]=-\frac{1}{32}\times\left[\frac{1}{2}a-\frac{\sin 4a}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left[\frac{\cos^6 b}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{32}\times\left[\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{1}{6}\right]=\frac{\pi}{768}$$

**Задание 9.** Используя формулу Грина, вычислить интеграл:

$\oint\limits_L x^3dy - ydx, L: x^2+y^2=4$.

**Решение**

$$\oint\limits_L x^3dy - ydx = \iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}x^3 - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) = \iint\limits_D\left(3x^2+1\right)$$

Перейдем к полярным координатам

$x = 2r\cos a$

$y = 2r\sin a$

$I = 2r$

Тогда,

$$\iint\limits_D \left(3x^2+1\right) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(3*(2r\cos a)^3+1\right) 2rdadr = 2\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(24r^4\cos^3 a + r\right) dadr =$$

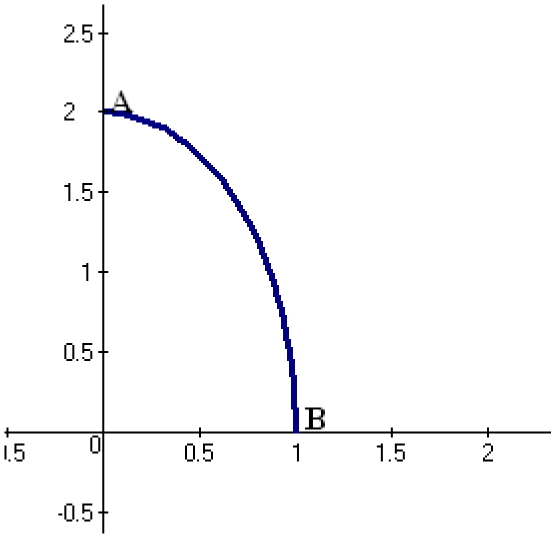
$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{24}{5} r^5 \cos^3 a + \frac{r^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 da = 2\int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{24}{5}\cos^3 a + \frac{1}{2} \right) da = 2\int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{24}{5}\left( \frac{\cos 3a}{4} - \frac{3}{4}\cos a \right) + \frac{1}{2} \right) da =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{6}{5}\cos 3a - \frac{18}{5}\cos a + \frac{1}{2} \right) da = 2\left[ \frac{2}{5}\sin 3a - \frac{18}{5}\sin a + \frac{1}{2}a \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

**Задание 10.** Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int\limits_L yds,\, L - \textit{четвертьэллипса}\, \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1, x \ge 0, y \ge 0$$

**Решение**




Параметризуем кривую:

$$x = \cos a$$

$$y = 2\sin a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 a + 4\sin^2 a} = \sqrt{1 + 3\sin^2 a}$$

Тогда,

$$\int\limits_L yds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin a\sqrt{1+3\sin^2 a}da = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin a\sqrt{1+3(1-\cos^2 a)}da = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin a\sqrt{4-3\cos^2 a}da =$$

$$= -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-3\cos^2 a}d\cos a = \left[ -\sqrt{4-3\cos^2 a}\cos a - \frac{4\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$

**Задание 11.** Используя формулу Гаусса-Остроградского, вычислить поверхностный интеграл:

$$\oint\limits_S\int x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

Где S – внешняя сторона поверхности куба

$0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5,\ 0\le z\le 5$

**Решение**

$$\oint\limits_S\int x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^2}{\partial y}+\frac{\partial z^2}{\partial z}\right)dxdydz=2\iiint\limits_V(x+y+z)=$$

$$=2\int_0^5\int_0^5\int_0^5(x+y+z)dxdydz=2\int_0^5\int_0^5\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_0^5dxdy=2\int_0^5\int_0^5\left[5x+5y+\frac{25}{2}\right]_0^5dxdy=$$

$$=10\int_0^5\int_0^5\left[x+y+\frac{5}{2}\right]_0^5dxdy=10\int_0^5\left[xy+\frac{y^2}{2}+\frac{5}{2}y\right]_0^5dx=10\int_0^5\left[5x+\frac{25}{2}+\frac{5}{2}*5\right]dx=10\int_0^5[5x+25]dx=$$

$$=50\int_0^5[x+5]dx=50\left[\frac{x^2}{2}+50x\right]_0^5=13125$$

**Задание 12.** Вычислить интеграл с использованием вычетов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx$$

**Решение**

Найдем нули знаменателя

$1+x^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm i$

$4+x^2=0\Rightarrow x_{3,4}=\pm 2i$

Подынтегральная функция является аналитической в верхней полуплоскости за исключением точек $i,2i$

Тогда, по основной теореме о вычетах $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}\limits_{z=a}f(z)$

$z_1=2i$ - полюс второго порядка, $z_1=i$ - полюс первого порядка

Тогда, для $z=i$ получаем $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}=\operatorname*{Lim}\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$

Для $z_1=i$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} s = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{2z^2+3z+1}{(z-i)(z+i)(z^2+4)^2} = \lim_{z\to i}\frac{2z^2+3z+1}{(z+i)(z^2+4)^2} =$$

$$\frac{2i^2+3i+1}{(i+i)(i^2+4)^2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{18}i$$

Для полюса $2i$ второго порядка получаем

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} s = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\frac{2z^2+3z+1}{(z^2+1)(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2+3z+1}{(z^2+1)(z+2i)^2}\right] =$$

$$\lim_{z\to 2i}\frac{(4z+3)(z^2+1)(z+2i)^2+\left(2z^2+3z+1\right)\left(2z(z+2i)^2+2(z^2+1)(z+2i)\right)}{(z^2+1)^2(z+2i)^4} = -\frac{1}{6}-\frac{29}{288}i$$

Тогда, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}i-\frac{1}{6}-\frac{29}{288}i\right) = \frac{13}{144}\pi$.