Контрольная работа с решением
Исследование функции с помощью производной

Задача 1. Найдите наклонные или горизонтальные асимптоты графика функции:

$$y=\frac{1-x^3}{x^2+x}$$

Решение. Будем искать наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{(x^2+x)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{(x^3+x^2)}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^3-1}{(1+1/x)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{x+x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3+x^3+x^2}{x+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1/x^2+1}{1/x+1}\right)=1.$$

Получили наклонную асимптоту $y = -x + 1$.

Задача 2. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции:

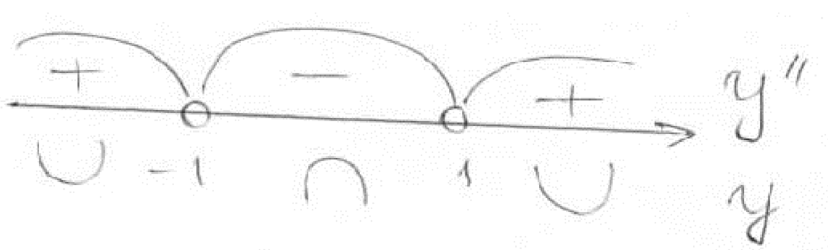
$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Решение. Найдем первую, а потом вторую производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=-4\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

$$y''=\left(-4\frac{x}{(x^2-1)^2}\right)'=-4\frac{(x^2-1)^2-x\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=-4\frac{x^2-1-4x^2}{(x^2-1)^3}=4\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$$

Критические точки: $x_1=-1, x_2=1$.



Функция выпукла вниз (вогнута) на интервалах $(-\infty;-1),\ (1;+\infty)$, выпукла вверх (выпукла) на интервале $(-1;1)$.

Задача 3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на промежутке $[0;2]$.

$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая.

Найдем критические точки. Вычислим производную и приравняем к нулю:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)'=\frac{1}{3}3x^2-2\cdot 2x+3=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0..$$

Получаем критические точки: $x_1=1,\ x_2=3$. Первая лежит внутри отрезка, вторая не принадлежит отрезку, ее не рассматриваем.

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$y(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$, $y(2)=\frac{1}{3}8-2\cdot 4+3\cdot 2=\frac{2}{3}$.

Наименьшее значение функции 0, наибольшее 4/3.

Задача 4. Составить уравнение касательных к кривой $y=\frac{x+4}{2x+5}$, которые перпендикулярны прямой $y=3x+4$. Сделать чертеж.

Решение. Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ имеет вид:

$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$.

Здесь $y'(x_0)=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{3}$, так как по условию касательная должна быть перпендикулярна прямой $y=3x+4$ с угловым коэффициентом $k=3$.

Найдем производную и приравняем к $-\frac{1}{3}$:

$$y'=\left(\frac{x+4}{2x+5}\right)'=\frac{1(2x+5)-(x+4)2}{(2x+5)^2}=\frac{2x+5-2x-8}{(2x+5)^2}=\frac{-3}{(2x+5)^2}=-\frac{1}{3},$$

$(2x+5)^2=9,$

$2x+5=\pm 3,$

$x=\frac{\pm 3-5}{2},$

$x_0=-4$ *или* $x_0=-1.$

1) Пусть $x_0=-4$.

Находим $y(x_0)=y(-4)=\dfrac{-4+4}{-8+5}=0$.

Составляем уравнение касательной:

$$y=0-\frac{1}{3}(x+4),$$

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}.$$

2) Пусть $x_0=-1$.

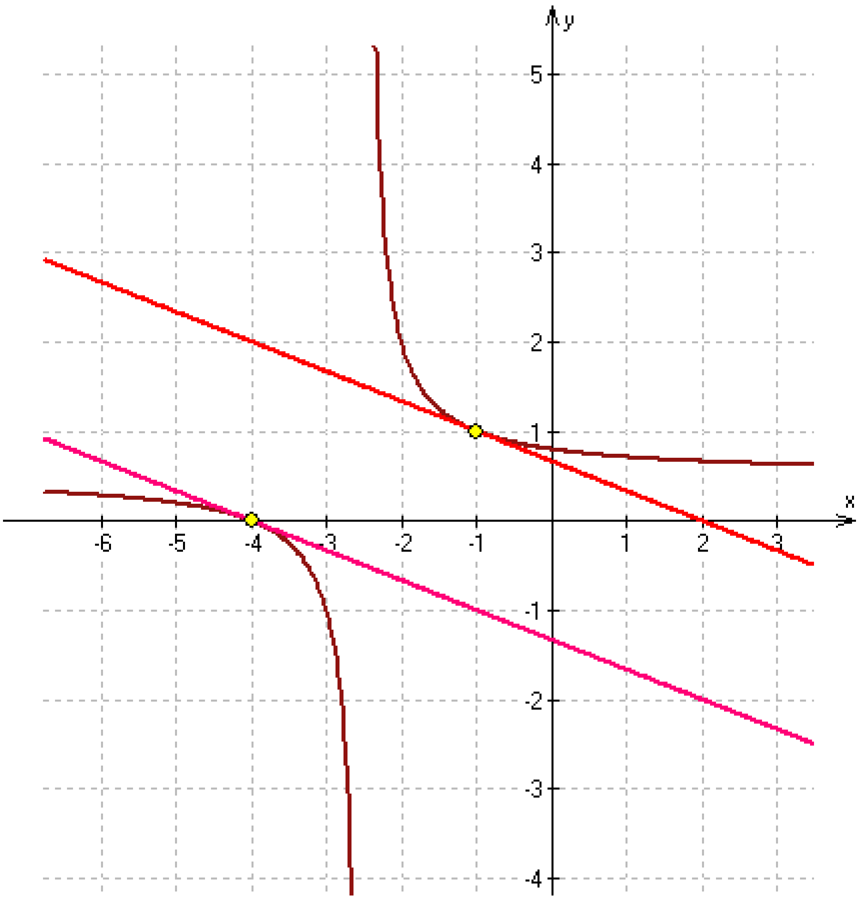
Находим $y(x_0)=y(-1)=\dfrac{-1+4}{-2+5}=\dfrac{3}{3}=1$.

Составляем уравнение касательной:

$$y=1-\frac{1}{3}(x+1),$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.$$

Сделаем чертеж линии и касательных:



Задача 5. Найти экстремумы функции;

$y = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x$.

Решение.

Найдем первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x\right)' = \frac{2}{9}3x^2 - \frac{1}{3}2x - 4 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4..$$

Приравняем к нулю и найдем критические точки:

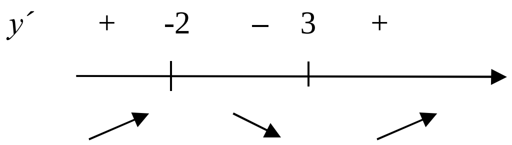
$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4 = 0,$$

,

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

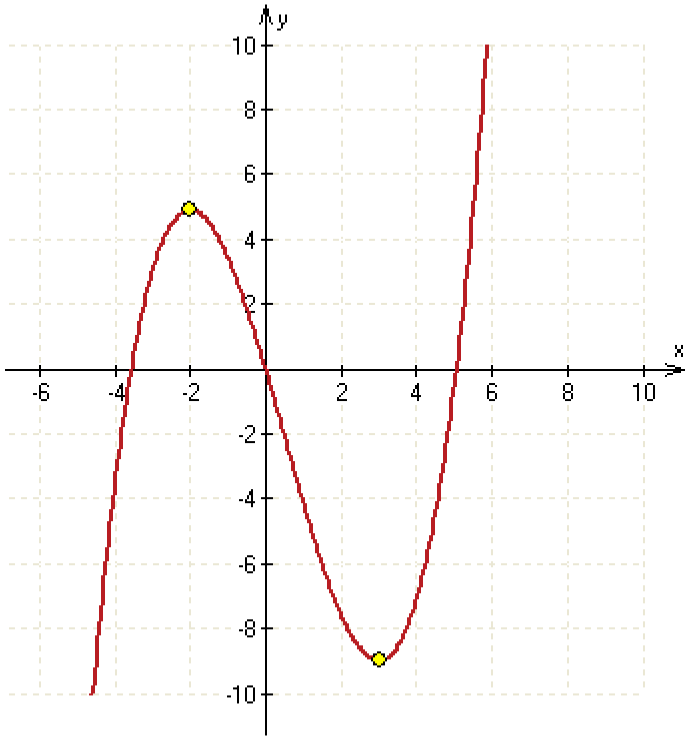
Строим точки на числовой прямой, отмечаем знаки производной на каждом интервале, на которые точки делят числовую прямую.



Функция убывает на интервале $(-2;3)$, возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(3;+\infty)$.

Функция имеет максимум при $x = -2$, $y(-2) = \frac{44}{9}$, минимум при $x = 3$, $y(3) = -9$.

Схематический график:



Задача 6. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{x}{(x-3)(x-1)}$

1. Область определения функции

$x \neq 1$

$x \neq 3$

$D(y)$: $x \in (-\infty;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$

2. Координаты точек пересечения с осями.

$y(0)=0$

$y = 0$

$x = 0$

График функции пересекает оси координат в точке (0; 0).

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x-3)(-x-1)} = \frac{-x}{(x+3)(x+1)} \neq y(x) \neq -y(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Асимптоты графика и пределы на плюс, минус бесконечности.

Вертикальные асимптоты:

$x = 1,\ x = 3$

Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-3)(x-1)} = 0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{(x-3)(x-1)}-0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{3}{x})(x-1)}=0$$

Горизонтальная асимптота:
$y=0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(1-\frac{3}{x})(x-1)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\frac{3}{x})(x-1)}=0$$

5. Критические точки

$$y'=\left(\frac{x}{(x-3)(x-1)}\right)'==\left(\frac{x}{x^2-4x+3}\right)'=\frac{x'\cdot(x^2-4x+3)-x\cdot(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+3-x\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{x^2-4x+3-2x^2+4x}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-x^2+3}{(x^2-4x+3)^2}$$

$y'=0$

$x=\pm\sqrt{3};\ x\neq 1,\ x\neq 3$

6. Интервалы монотонности и точки экстремума.

Точка экстремума:
$x=\pm\sqrt{3}$

Функция возрастает при $y'>0$ и убывает при $y'<0$.
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	–	0	+	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	–
y	↘	min	↗	Не сущ.	↗	max	↘	Не сущ.	↘

Функция возрастает на промежутках $(-\sqrt{3};1)$ $(1;\sqrt{3})$ и убывает на промежутках $(-\infty;-\sqrt{3})$ $(\sqrt{3};3)$ $(3;+\infty)$

$$y_{\min}=y(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3}-3)(-\sqrt{3}-1)}\approx-0{,}1$$

$$y_{\max}=y(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-1)}\approx-1{,}9$$

7. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y'' = \left(\frac{-x^2+3}{(x^2-4x+3)^2}\right)' = \frac{(-x^2+3)'(x^2-4x+3)^2-(-x^2+3)((x^2-4x+3)^2)'}{(x^2-4x+3)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-4x+3)^2-(-x^2+3)\cdot 2(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^4} =$$

$$= \frac{-2(x^2-4x+3)(x^3-4x^2+3x-2x^3+4x^2+6x-12)}{(x^2-4x+3)^4} =$$

$$= \frac{-2(x^2-4x+3)(-x^3+9x-12)}{(x^2-4x+3)^4} = \frac{2(x^3-9x+12)}{(x^2-4x+3)^3} = \frac{2(x^3-9x+12)}{(x-1)^3(x-3)^3}$$

$y''=0$

Найдем точки перегиба.

$x \ne 1,\ x \ne 3$

$x^3-9x+12=0$

Решим кубическое уравнение методом Виета-Кардано.

$a=0, b=-9, c=12$

$$Q=\frac{a^2-3b}{9}=\frac{27}{9}=3$$

$$R=\frac{2a^3-9ab+27c}{54}=\frac{324}{54}=6$$

$S=Q^3-R^2=3^3-6^2=-9<0$

$Q>0$

Уравнение имеет один действительный корень.

$$x=-2\operatorname{sgn}(R)\sqrt{Q}\, sh\left(\frac{1}{3} arch\left(\frac{|R|}{\sqrt{Q^3}}\right)\right) \approx -3{,}52$$

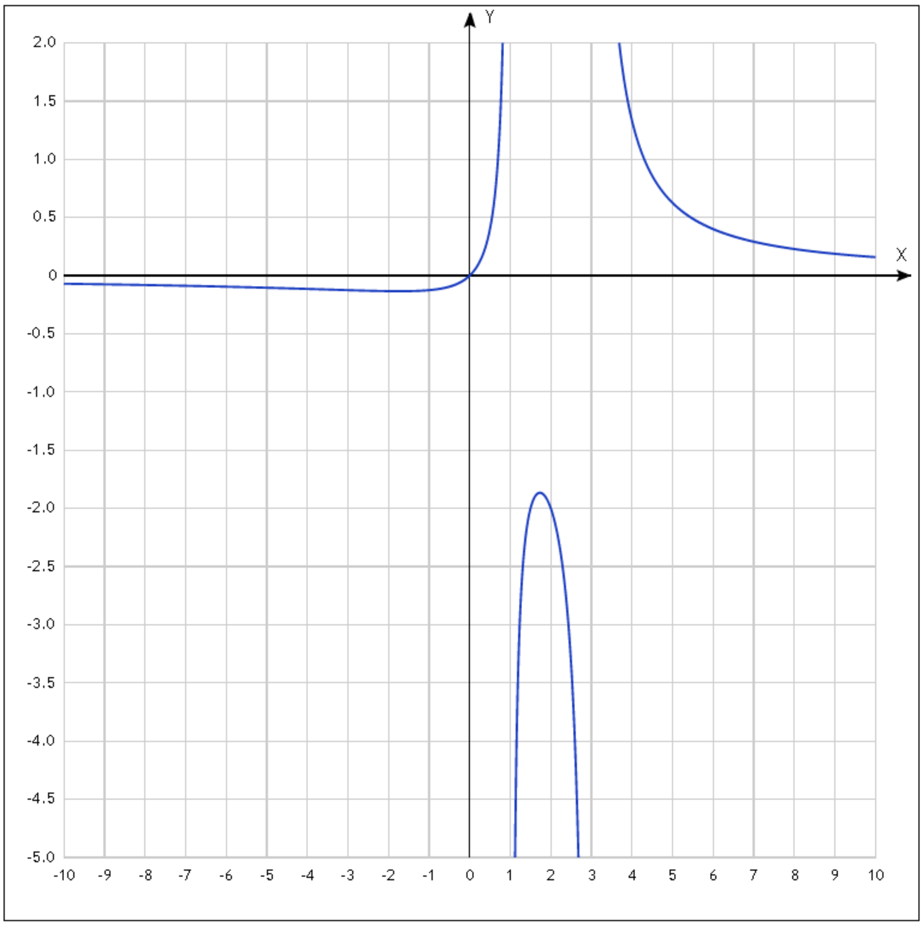
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-3{,}52)$	$-3{,}52$	$(-3{,}52;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;+\infty)$
y''	–	0	+	Не сущ.	–	Не сущ.	+
y	$\cap$		$\cup$	Не сущ.	$\cap$	Не сущ.	$\cup$

В интервалах $(-3{,}52;1)$ $(3;+\infty)$ кривая вогнутая.

В интервалах $(-\infty;-3{,}52)$ $(1;3)$ кривая выпуклая.

8. Построим график



9. Дополнительные точки, если нет асимптот.

   Асимптоты имеются, построение дополнительных точек не требуется.

10. Область значения функции определим по графику.

$$y_{\min} = y(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3}-3)(-\sqrt{3}-1)} \approx -0{,}1$$

$$y_{\max} = y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-1)} \approx -1{,}9$$

$E(y)$: $x \in (-\infty; -1{,}9) \cup (-0{,}1; +\infty)$

Задача 7. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

1. Область определения функции

   $(x+1)(x-2) \neq 0$

   $x \neq -1;\ x \neq 2$

   $D(y)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$

2. Координаты точек пересечения с осями ординат

$$y(0)=\frac{0}{(0+1)(0-2)}=0$$

$$y=0$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=0$$

Таких точек нет.

График функции пересекает оси координат в точке (0; 0).

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x)=\frac{1}{(-x+1)(-x-2)}\neq y(x)\neq -y(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Асимптоты графика и пределы на плюс, минус бесконечности.

Уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x+1)(x-2)}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{(x+1)(x-2)}-0\right)=0$$

Горизонтальная асимптота:

$y=0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=0$$

5. Критические точки

$$y'=\left(\frac{1}{(x+1)(x-2)}\right)'=\frac{0-((x+1)(x-2))'}{(x+1)^2(x-2)^2}=-\frac{(x+1)'(x-2)+(x+1)(x-2)'}{(x+1)^2(x-2)^2}=$$

$$=-\frac{x-2+x+1}{(x+1)^2(x-2)^2}=-\frac{2x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}=\frac{1-2x}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

$$y'=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Критические точки:

$$x=-1;x=\frac{1}{2};\ x=2$$

6. Интервалы монотонности и точки экстремума.

Функция возрастает при $y'>0$ и убывает при $y'<0$.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$\left(-1;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$	2	$(2;+\infty)$

y'	+	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	–
y	↗	Не сущ.	↗	max	↘	Не сущ.	↘

Функция возрастает на промежутках:

$$(-\infty;-1)\quad\left(-1;\frac{1}{2}\right)$$

Функция убывает на промежутках:

$$\left(\frac{1}{2};\,2\right)\quad(2;+\infty)$$

Точка максимума:

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4}{9}$$

7. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y''=\left(\frac{1-2x}{(x+1)^2(x-2)^2}\right)'=\left(\frac{1-2x}{(x^2-x-2)^2}\right)'=\frac{(1-2x)'(x^2-x-2)^2-(1-2x)((x^2-x-2)^2)'}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{(1-2x)'(x^2-x-2)^2-(1-2x)((x^2-x-2)^2)'}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{-2(x^2-x-2)^2-2(1-2x)(x^2-x-2)(2x-1)}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{-2(x^2-x-2)^2+2(x^2-x-2)(2x-1)^2}{(x^2-x-2)^4}=\frac{-2(x^2-x-2)(x^2-x-2-(2x-1)^2)}{(x^2-x-2)^4}=$$

$$=\frac{-2(x^2-x-2)(x^2-x-2-4x^2+4x-1)}{(x^2-x-2)^4}=\frac{-2(-3x^2+3x-3)}{(x^2-x-2)^3}=\frac{6(x^2-x+1)}{(x^2-x-2)^3}$$

$$\frac{6(x^2-x+1)}{(x^2-x-2)^3}=0$$

$$D=(-1)^2-4=-3<0$$

$$x^2-x+1\neq 0$$

$$x^2-x+1>0\quad\forall x\in D$$

Точек перегиба нет

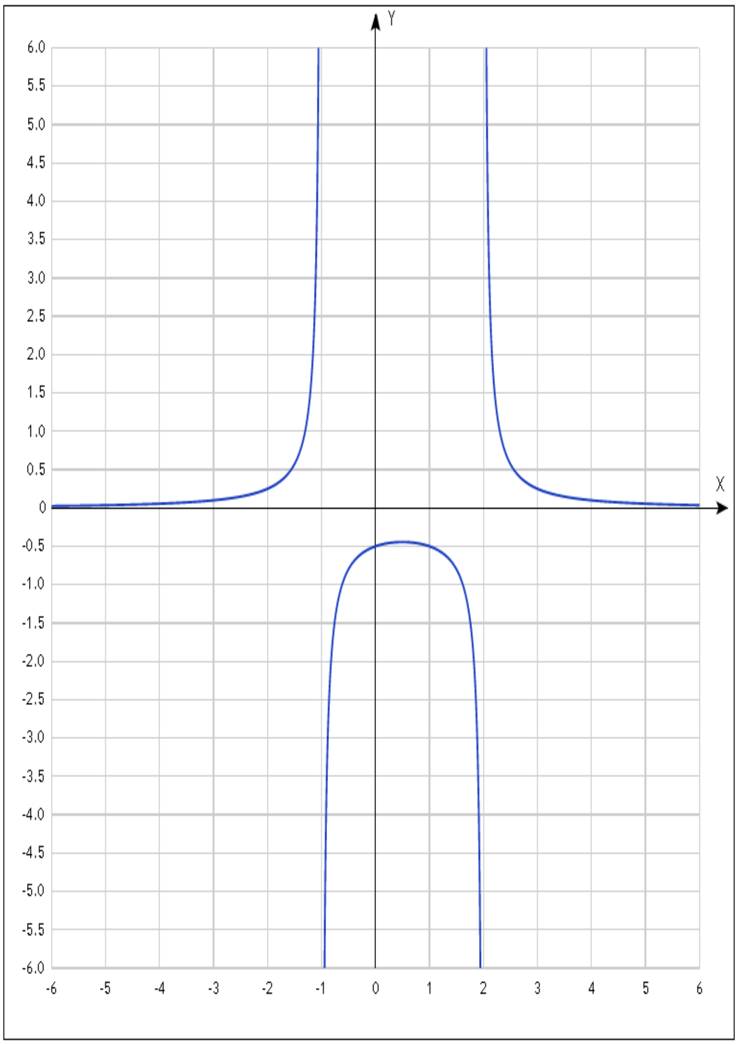
$x\neq-1;\ x\neq 2$

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;\,2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	+	Не сущ.	–	Не сущ.	+
y	∪	Не сущ.	∩	Не сущ.	∪

В интервалах $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$ кривая вогнутая.
В интервале $(-1;\ 2)$ кривая выпуклая.

8. Построим график



9. Область значения функции

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4}{9}$$

$$E(y):\ x\in\left(-\infty;-\frac{4}{9}\right]\cup(0;+\infty)$$