Контрольная работа

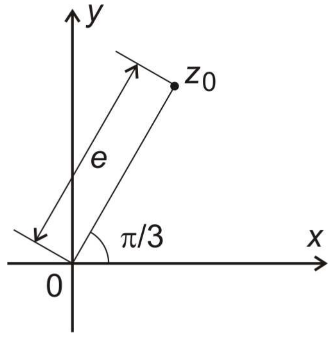
Комплексные числа и комплексный анализ

Вариант №1.

1. а) Найти все комплексные значения выражения $e^{1+\frac{\pi}{3}i}$ и изобразить их на комплексной плоскости

Решение

$z_0 = e^{1+\frac{\pi}{3}i} = e^1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$



1. б) Найти все комплексные значения выражения $\sqrt[3]{-1-i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение

Обозначим $w(z) = \sqrt[3]{z}$, $z = x + iy = -1 - i$, $x = -1$ $y = -1$. Тогда

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$|w| = \left|\sqrt[3]{z}\right| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{2};$$

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg}(\sqrt[3]{z}) = \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{3}; k = 0,1,2.$$

Поскольку $x < 0$ и $y < 0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

Рассмотрим теперь все случаи

$$k=0:\ \operatorname{Arg} w_0=\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\cdot 0\cdot \pi}{3}=-\frac{\pi}{4};$$

$$k=1:\ \operatorname{Arg} w_1=\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\cdot \pi}{3}=\frac{5}{12}\pi;$$

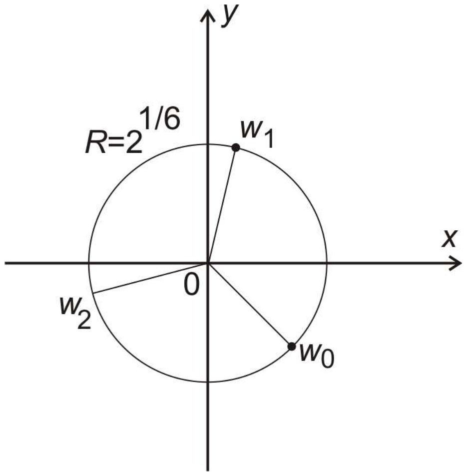
$$k=2:\ \operatorname{Arg} w_2=\frac{-\frac{3}{4}\pi+4\cdot \pi}{3}=\frac{13}{12}\pi;$$

Таким образом, получим, что $\sqrt[3]{-1-i}$ принимает три комплексных значения:

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right);$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right);$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right);$$



2. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $f(z)=e^{2z-1}$.

Решение

Представим функцию в виде

$$f(z)=e^{2(x+iy)-1}=e^{2x-1}\cdot e^{i2y}$$

и воспользуемся условиями Коши-Римана, которые для комплексной функции, записанной в форме $R(x,y)\cdot e^{i\phi(x,y)}$ имеют вид

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial y};$$
$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Учитывая, что в нашем случае $R=e^{2x-1}$, $\phi=2y$ и выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{1}{e^{2x-1}}\cdot e^{2x-1}\cdot 2=2\equiv 2,$$
$$\frac{1}{e^{2x-1}}\cdot 0=-0\equiv 0.$$

Что и означает выполнение условий Коши-Римана.

3. Разложить функцию $f(z)$ по степеням $z-z_0$ в ряд Тейлора или Лорана во всех областях на плоскости, где такое разложение возможно

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-z},\ z_0=-1.$$

Решение

Функция $f(z)$ имеет особые точки $z=0$, $z=1$. Функция будет аналитической в областях:

а) внутренность круга $|z+1|<1$,

б) кольцо $1<|z+1|<2$,

в) внешность круга $|z+1|>2$.

Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}=\frac{(A+B)z-A}{z^2-z}$$

Отсюда $A=-2$, $B=3$ и

$$f(z)=-\frac{2}{z}+\frac{3}{z-1}.$$

Найдем разложение функции в области а):

$$f(z)=-\frac{2}{z}+\frac{3}{z-1}\equiv\frac{2}{1+(-(z+1))}-\frac{3}{2\left(1+\left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)}.$$

И для каждой из дробей в последнем выражении воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,\ |z|<1; \qquad (*)$$

$$\frac{2}{1+(-(z+1))}=2\left(1+(z+1)+(z+1)^2+\ldots+(z+1)^n+\ldots\right),\ |z+1|<1;$$

$$\frac{3}{2\left(1+\left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)}=\frac{3}{2}\left(1+\frac{z+1}{2}+\frac{(z+1)^2}{4}+\ldots+\frac{(z+1)^n}{2^n}+\ldots\right),\ |z+1|<2.$$

Тогда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}-3}{2^{n+1}}(z+1)^n,\ |z+1|<1.$$

Найдем разложение функции в области б):

Ряд для второй из рассмотренных выше дробей сходится при $|z+1|<2$, а ряд для первой дроби расходится для $|z+1|>1$, поэтому первую дробь необходимо преобразовать.

$$f(z)=-\frac{2}{(z+1)\left(1+\frac{-1}{z+1}\right)}+\frac{3}{2\left(1+\left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)},$$

Применим разложение (*) получим:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{-1}{z+1}\right)}=1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\ldots,\ \left|\frac{1}{z+1}\right|<1\Rightarrow|z+1|>1.$$

Таким образом

$$f(z)=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n},\ 1<|z+1|<2.$$

Найдем разложение функции в области в):

В этой области полученный в б) ряд для $2/\left(1+(-(z+1))\right)$ сходится а для $3/2\left(1+\left(-(z+1)/2\right)\right)$ - расходится.

Представим $f(z)$ в виде и применим разложение (*)

$$f(z)=-\frac{2}{(z+1)\left(1+\frac{-1}{z+1}\right)}+\frac{3}{(z+1)\left(1+\left(-\frac{2}{z+1}\right)\right)},$$

И применяя разложение (*) по аналогии с предыдущими случаями, получим:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n-2}{(z+1)^{n+1}}.$$

4. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее особых точках с помощью пределов:

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}.$$

Решение.

Точки $z=-i$ и $z=i$ - нули знаменателя второго порядка, поскольку при $z=\pm i$ числитель не обращается в ноль, то эти точки являются и полюсами второго порядка.

Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Тогда

$$\operatorname{res} f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z+i)^2\cdot z}{(z-i)^2\cdot(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)^2-2(z-i)z}{(z-i)^4}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{-z^2-1}{(z-i)^4}=\frac{-(-i)^2-1}{(-i-i)^4}=0.$$

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-i)^2\cdot z}{(z-i)^2\cdot(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2-2(z+i)z}{(z+i)^4}=\frac{-i^2-1}{(2i)^4}=0.$$

5.Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов

$$\int_C\frac{4}{(z^2+4)^2}dz,\ C\{z:|z-i|=2\},$$

Решение.

$$z-i=x+iy-i=x+(y-1)i.$$

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$$

Таким образом $C: x^2+(y-1)^2=4$ - окружность с центром в точке $T[0;1]$ и радиусом $R=2$.

$$f(z)=\frac{4}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{4}{(z+2i)^2(z-2i)^2}.$$

Точка $z=-2i$ находится вне контура, а точка $z=2i$ - внутри контура. Значит

$$\operatorname{res} f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-2i)^2 4}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right\}=\lim_{z\to 2i}-\frac{8}{(z+2i)^3}=-\frac{8}{(4i)^3}=\frac{1}{8i}=-\frac{1}{8}i\,.$$

Согласно основной теореме вычетах, получим:

$$\int_C \frac{4}{(z^2+4)^2}dz=-2\pi i\frac{1}{8}i=\frac{\pi}{4}.$$