Задача 1. Найти общее и частное решение.

$x\left(\left(y'\right)^2+x^2\right)y''=2\left(y'\right)^3,\ y(1)=\dfrac{1}{3};y'(1)=1+\sqrt{2}$

Решение. Так как в уравнение явно не входит функция y, делаем замену $z=y',\ z'=y''$. Получим:

$$x\left(z^2+x^2\right)z'=2z^3,$$

$$z'=\frac{2z^3}{x\left(z^2+x^2\right)},\qquad .$$

$$z'=\frac{2(z/x)^3}{\left((z/x)^2+1\right)}.$$

Решаем получившееся однородное уравнение. Делаем замену $v=z/x,\ z=vx,\ z'=v'x+v$. Получаем:

$$v'x+v=\frac{2v^3}{\left(v^2+1\right)},$$

$$v'x=\frac{2v^3}{\left(v^2+1\right)}-v,$$

$$\frac{dv}{dx}x=\frac{2v^3-v^3-v}{\left(v^2+1\right)},$$

$$\frac{dv}{dx}x=\frac{v^3-v}{\left(v^2+1\right)},$$

$$\frac{v^2+1}{v^3-v}dv=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{v^2+1}{v^3-v}dv=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{v^2+1}{v(v-1)(v+1)}dv=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{1}{v+1}+\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v}\right)dv=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v+1|+\ln|v-1|-\ln|v|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\frac{(v+1)(v-1)}{v}=Cx,$$

$$\frac{v^2-1}{v}=Cx.$$

Возвращаемся к функции z:

$$\frac{(z/x)^2-1}{z/x}=Cx,$$
$$\frac{z^2-x^2}{zx}=Cx,$$
$$z^2-x^2=Czx^2.$$

Найдем постоянную C из начального условия: $z(1)=y'(1)=1+\sqrt{2}$:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1^2=C\left(1+\sqrt{2}\right),$$
$$1+2\sqrt{2}+2-1=C\left(1+\sqrt{2}\right),$$
$$C=\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2.$$

Получили $z^2-x^2=2zx^2$. Выразим отсюда функцию z:

$$z^2-2x^2z-x^2=0,$$
$$D=\left(-2x^2\right)^2-4\left(-x^2\right)=4x^4+4x^2,$$
$$z=\frac{2x^2\pm\sqrt{4x^4+4x^2}}{2}=x^2\pm x\sqrt{x^2+1}.$$

Исходя из начального условия $z(1)=1+\sqrt{2}$, выбираем единственный корень:

$$z=x^2+x\sqrt{x^2+1}.$$

Возвращаемся к исходной функции:

$$y'=x^2+x\sqrt{x^2+1},$$
$$y=\int\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}d\left(x^2+1\right)=$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+D=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+D.$$

Общее решение $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+D$.

Найдем постоянную D из начального условия $y(1)=\frac{1}{3}$. Получим:

$$y(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1+1)^{3/2}+D=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{8}+D=0,$$
$$D=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Искомое частное решение $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3. Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного уравнения (без вычисления коэффициентов).
$y^V+y'''=xe^x-1-x^2\cos x\,e^{2x}+\sin x-x$.

Решение. Решим однородное уравнение: $y^V+y'''=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:
$k^5+k^3=0.$
Решим данное уравнение.
$k^5+k^3=0,$
$k^3\left(k^2+1\right)=0,$
$k_{1,2,3}=0,\ k_4=i,\ k_5=-i.$

Общее решение запишется в следующем виде:
$y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x.$

Укажем вид частного решения неоднородного уравнения (без вычисления коэффициентов). Запишем правую часть уравнения $F=xe^x-1-x^2\cos x\,e^{2x}+\sin x-x$ как сумму нескольких различных функций:
$F=F_1+F_2+F_3+F_4$
$F_1=xe^x,$
$F_2=\sin x,$
$F_3=-1-x,$
$F_4=-x^2e^{2x}\cos x.$

Для каждой функции F_i запишем соответствующее частное решение.

$F_1=xe^x$. Вид частного решения следующий:
$Y_1=\left(A_1x+A_2\right)e^x$.

$F_2=\sin x$. Так как $k=\pm i$ - корень характеристического уравнения, вид частного решения
$Y_2=\left(B_1\sin x+B_2\cos x\right)x$.

$F_3=-1-x.$ Так как $k=0$ - корень кратности 3, то вид частного решения
$Y_3=\left(W_1x+W_2\right)x^3=W_1x^4+W_2x^3$.

$F_4=-x^2e^{2x}\cos x.$ Вид частного решения:
$Y_4=e^{2x}\left(\left(D_1x^2+D_2x+D_3\right)\cos x+\left(E_1x^2+E_2x+E_3\right)\sin x\right).$

Получаем общий вид частного решения для данной правой части:

$$Y_{\text{÷í .}}=\left(A_1x+A_2\right)e^x+\left(B_1\sin x+B_2\cos x\right)x+W_1x^4+W_2x^3+$$

$$+e^{2x}\left(\left(D_1x^2+D_2x+D_3\right)\cos x+\left(E_1x^2+E_2x+E_3\right)\sin x\right)$$

Задача 5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего линейного однородного уравнения.
$y''-2\left(\operatorname{tg}x+1\right)y'+\left(2\operatorname{tg}x+1\right)y=2e^x\sec^4 x$, $y_1=e^x$.

Решение. Используем теорему (следствие из формулы Остроградского-Лиувилля):
Теорема. *Если задано уравнение вида* $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ *и известно одно ненулевое решение y = y₁, то общее решение может быть найдено по формуле*:

$$y\left(x\right)=C_1y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx+C_2y_1.$$

Запишем уравнение в следующем виде:
$y''+\left(-2\operatorname{tg}x-2\right)y'+\left(2\operatorname{tg}x+1\right)y=2e^x\sec^4 x$.
Рассматриваем однородное уравнение:
$y''+\left(-2\operatorname{tg}x-2\right)y'+\left(2\operatorname{tg}x+1\right)y=0$
Здесь $p_1\left(x\right)=\left(-2\operatorname{tg}x-2\right)$, $p_2\left(x\right)=\left(2\operatorname{tg}x+1\right)$.

Таким образом,

$$y=C_1e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\left(2\operatorname{tg}x+2\right)dx}dx+C_2e^x.$$

Считаем внутренний интеграл: $\int\left(2\operatorname{tg}x+2\right)dx=-2\ln\left(\cos\left(x\right)\right)+2x$

Подставляем:

$$y=C_1e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-2\ln\left(\cos\left(x\right)\right)+2x}dx+C_2e^x=$$

$$=C_1e^x\int e^{-2x-2\ln\left(\cos\left(x\right)\right)+2x}dx+C_2e^x=$$

$$=C_1e^x\int e^{\ln\left(\cos^{-2}(x)\right)}dx+C_2e^x=C_1e^x\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C_2e^x=C_1e^x\operatorname{tg}x+C_2e^x.$$

Мы нашли общее решение однородного уравнения и систему фундаментальных решений $y_1=e^x\operatorname{tg}x,\ y_2=e^x$. Теперь найдем решение неоднородного уравнения

$$y''+\left(-2\operatorname{tg}x-2\right)y'+\left(2\operatorname{tg}x+1\right)y=2e^x\sec^4 x,$$

$$y''+\left(-2\operatorname{tg}x-2\right)y'+\left(2\operatorname{tg}x+1\right)y=\frac{2e^x}{\cos^4 x}$$

в виде:
$Y=C_1\left(x\right)y_1+C_2\left(x\right)y_2=C_1\left(x\right)e^x\operatorname{tg}x+C_2\left(x\right)e^x$.

Вычисляем вронскиан:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x \operatorname{tg} x & e^x \\ e^x \operatorname{tg} x+e^x \dfrac{1}{\cos^2 x} & e^x \end{vmatrix}=e^{2x}\operatorname{tg} x-e^{2x}\operatorname{tg} x-e^{2x}\frac{1}{\cos^2 x}=-e^{2x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Вычисляем дополнительные определители:

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{2e^x}{\cos^4 x} & e^x \end{vmatrix}=-\frac{2e^{2x}}{\cos^4 x}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} e^x \operatorname{tg} x & 0 \\ e^x \operatorname{tg} x+e^x \dfrac{1}{\cos^2 x} & \dfrac{2e^x}{\cos^4 x} \end{vmatrix}=\frac{2e^{2x}}{\cos^4 x}\operatorname{tg} x$$

Тогда получаем выражения для $C_i'(x)$ по формулам Крамера:

$$C_1'(x)=\frac{W_1}{W}=\left(-\frac{2e^{2x}}{\cos^4 x}\right):\left(-e^{2x}\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{2}{\cos^2 x}.$$

$$C_2'(x)=\frac{W_2}{W}=\left(\frac{2e^{2x}}{\cos^4 x}\operatorname{tg} x\right):\left(-e^{2x}\frac{1}{\cos^2 x}\right)=-\frac{2}{\cos^2 x}\operatorname{tg} x..$$

Интегрируем:

$$C_1(x)=\int\frac{2}{\cos^2 x}dx=2\operatorname{tg} x+A_1,$$

$$C_2(x)=-\int\frac{2}{\cos^2 x}\operatorname{tg} x dx=-\int 2\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x)=-\operatorname{tg}^2 x+A_2.$$

Искомое решение:

$$Y=(2\operatorname{tg} x+A_1)e^x\operatorname{tg} x+\left(-\operatorname{tg}^2 x+A_2\right)e^x=$$

$$=e^x\left[2\operatorname{tg}^2 x+A_1\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x+A_2\right]=e^x\left[\operatorname{tg}^2 x+A_1\operatorname{tg} x+A_2\right].$$

Ответ: $Y=e^x\left[\operatorname{tg}^2 x+A_1\operatorname{tg} x+A_2\right].$