Контрольная работа №1
Вариант 1

Задача 1. В партии из 25 изделий содержится 15 изделий первого сорта и 10 – второго. Случайным образом выбираются 3 изделия. Найти вероятность того, что среди выбранных хотя бы одно изделие первого сорта.

Решение. Введем событие:
X = (Среди выбранных хотя бы одно изделие первого сорта).
Рассмотрим противоположное ему событие:
$\overline{X}$ =(Среди выбранных нет изделий первого сорта).

Используем классическое определение вероятности: $P=\dfrac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех равновозможных элементарных исходов.

$n=C_{25}^{3}=\dfrac{25!}{3!22!}=\dfrac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3}=2300$ - число способов выбрать любые 3 изделия из 25.
$m=C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!7!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ - число различных способов выбрать 3 изделия второго сорта (из 10).
Искомая вероятность равна $P\left(X\right)=1-P\left(\overline{X}\right)=1-\dfrac{m}{n}=1-\dfrac{120}{2300}=\dfrac{109}{115}\approx 0,948.$

Ответ: 0,948.

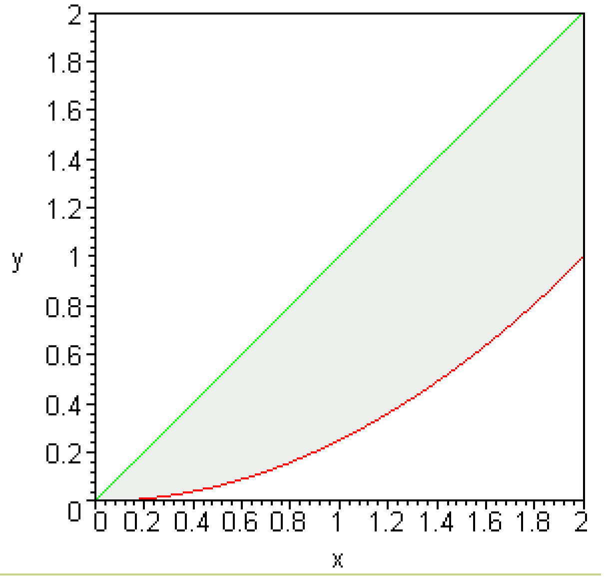
Задача 2. На отрезке $\left[0;2\right]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству $x^2\le 4y\le 4x$.

Решение. Используем геометрическое определение вероятности. Сделаем схематический чертеж. Берем числа x,y из квадрата $\left[0;2\right]\times\left[0;2\right]$.

Рассмотрим условие $x^2\le 4y\le 4x$
Строим линии:

1) $\begin{array}{l} x^2\le 4y, \\ y\le \dfrac{x^2}{4}. \end{array}$ область выше параболы $y=\dfrac{x^2}{4}$.

2) $\begin{array}{l} 4y\le 4x, \\ y\le x. \end{array}$ область ниже прямой $y=x$.



Таким образом, вероятность p равна отношению площади закрашенной фигуры (в которой выполняются условия 1 и 2) к площади всей фигуры (квадрата):

$$p=\frac{S_{фиг.}}{S_{квад.}}$$

Площадь квадрата $S_{квад.}=2\cdot 2=4$.

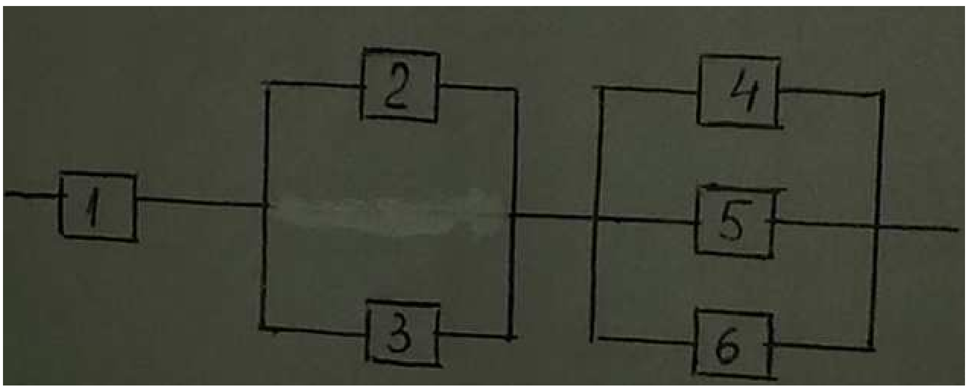
Площадь закрашенной области

$$S_{фиг.}=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{1}{2}2^2-\frac{1}{12}2^3\right)=\frac{4}{3}.$$

Тогда вероятность $p=\frac{S_{фиг.}}{S_{квад.}}=\frac{4/3}{4}=\frac{1}{3}=0,333$.

Ответ: 0,333.

Задача 3. Дана схема включения элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени Т равна 0,5. Вычислить вероятность отказа всей цепи.



Решение. Рассмотрим события:

A_i = (Элемент с номером i откажет), $i = 1,...,6$, $P(A_i) = 0,5$, $P(\overline{A_i}) = 0,5$.

Искомое событие B = (Цепь откажет), противоположное ему: $\overline{B}$ = (Цепь работает безотказно).

Выразим событие $\overline{B}$ через A_i. Учитываем, что последовательному соединению отвечает произведение событий, а параллельному – сумма событий.

$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot (\overline{A_2} + \overline{A_3}) \cdot (\overline{A_4} + \overline{A_5} + \overline{A_6})$.

Выразим вероятность события B.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = P(\overline{A_1} \cdot (\overline{A_2} + \overline{A_3}) \cdot (\overline{A_4} + \overline{A_5} + \overline{A_6})) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} + \overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4} + \overline{A_5} + \overline{A_6}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot (1 - P(A_2)P(A_3)) \cdot (1 - P(A_4)P(A_5)P(A_6)) =$$
$$= 1 - 0,5 \cdot (1 - 0,5^2) \cdot (1 - 0,5^3) \approx 0,672.$$

Использовали формулу для независимых в совокупности событий $A_1,...A_n$:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_n}).$$

Ответ: 0,672.

Задача 4. Детали изготавливаются на двух станках. На первом станке – 40%, на втором – 60%. Среди деталей, изготовленных на первом станке, брак составляет 2%, на втором – 1,5%. Для контроля случайным образом взята 1 деталь. Найти вероятность событий:
А) деталь бракованная,
Б) деталь изготовлена на 1 станке, если при проверке она оказалась не бракованной.

Решение. Введем полную группу гипотез:
$H1$ = (Деталь изготовлена первым станком),
$H2$ = (Деталь изготовлена первым станком).

По условию: $P(H1) = 0,4$, $P(H2) = 0,6$.

Введем событие A = (Деталь оказалась бракованной). Условные вероятности даны в задаче: $P(A \mid H1) = 0,02$, $P(A \mid H2) = 0,015$.

1) Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности
$P(A) = P(A \mid H1)P(H1) + P(A \mid H2)P(H2) = 0,4 \cdot 0,02 + 0,6 \cdot 0,015 = 0,017 = 1,7\%.$

2) Найдем вероятность $P(H1 \mid \overline{A})$ того, что деталь изготовлена на первом станке, если она при проверке оказалась без брака.

Используем формулу Байеса: $P(H1|\overline{A}) = \dfrac{P(H1)P(\overline{A}|H1)}{P\left(\overline{A}\right)}$.

Найдем $P(\overline{A}|H1) = 1-0,02 = 0,98$, $P\left(\overline{A}\right) = 1-P\left(A\right) = 1-0,017 = 0,983$.

Подставляем:

$$P(H1|\overline{A}) = \frac{P(H1)P(\overline{A}|H1)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,4\cdot 0,98}{0,983} \approx 0,399.$$

Ответ: 1) 1,7%, 2) 0,399.

Задача 5. Прибор проходит независимые испытания. Вероятность выхода из строя прибора при одном испытании равна 0,2. Испытано независимо 100 приборов. Найти вероятность выхода из строя не более одного прибора.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n=100$ (количество приборов), $p=0,2$ (вероятность того, что прибор выйдет из строя). Будем использовать формулу $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (вероятность того, что из n приборов ровно k выйдут из строя).

Искомая вероятность выхода из строя не более одного прибора равна

$$P_{100}(k \le 1) = P_{100}(0) + P_{100}(1) = C_{100}^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{100} + C_{100}^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{99} =$$
$$= 0,8^{100} + 100 \cdot 0,2 \cdot 0,8^{99} \approx 0,53 \cdot 10^{-8} \approx 0.$$

Ответ: 0.