Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$.

Решение. Для удобства запишем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n3^{n}x^{n}.$$

Это степенной ряд. Найдем радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)3}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при

$|x|<1/3,\ x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Исследуем сходимость на концах интервала.

Пусть $x=\frac{1}{3}$, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}n3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n$. Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0$.

Пусть $x=-\frac{1}{3}$, получаем ряд

$\sum_{n=0}^{\infty}n3^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$. Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0$. Таким образом, область сходимости: $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.