

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)3^{n-1}x^{n-1}$.

Решение. Для удобства запишем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)3^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n3^n x^n.$$

Это степенной ряд. Найдем радиус сходимости:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)3} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при

$$|x| < 1/3, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right).$$

Исследуем сходимость на концах интервала.

Пусть $x = \frac{1}{3}$, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n3^n \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$. Ряд

расходится, так как не выполняется необходимый

признак сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$.

Пусть $x = -\frac{1}{3}$, получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n3^n \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n. \text{ Ряд расходится, так как}$$

не выполняется необходимый признак

сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$. Таким

образом, область сходимости: $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

Задача выполнена авторами www.MatBuro.ru

Фрагмент решения при помощи онлайн на экзамене

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике