Рукописное решение при сдаче экзамена по высшей математике и теории вероятностей

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n} x^n}{n!}$

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^n \cdot (n+1)!}{n! \, 5^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty$$, т.е. область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$

3) $n = 5000$, $p = 0{,}002$

$P_n(4) - ?$

$\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}002 = 10$

По формуле Пуассона

$$P_n(k) = \frac{e^{-np} \cdot (np)^k}{k!}$$

$$P_{5000}(4) = \frac{e^{-10} \cdot 10^4}{4!} = 0{,}019$$

$4!$ $= 0{,}0\ldots$

4) A_1 - попал первый стрелок $\quad p(A_1)=0{,}7;\ P(\bar{A}_1)=0{,}3$

A_2 - " — второй $\quad P(A_2)=0{,}8;\ P(\bar{A}_2)=0{,}2$

A_3 - " — третий $\quad P(A_3)=0{,}9;\ P(\bar{A}_3)=0{,}1$

A - хотя бы одно попадание

$\bar{A}$ - ни одного попадания

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=$$
$$=1-0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}994$$

5

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0\\ Ax, \text{ при } 0<x\le 1\\ 0, \text{ при } x>1\end{cases}$$

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ по св-ву дифференциальн. функции распределения

т.к. $f(x)\ne 0$ только при $0<x\le 1$

$$\int\limits_0^1 Ax\,dx=1$$

$$A\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1$$

$$\frac{A}{2}(1^2-0)=1 \Rightarrow A=2$$

б) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

1) $x\le 0$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

2) $0<x\le 1$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_0^x 2t\,dt=2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=x^2$

3) $x>1$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_0^1 2t\,dt+\int\limits_1^x 0\,dt=$

$$=2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=1^2-0=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

в) $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x\,dx$ - мат. ожидание

$$M(x)=\int\limits_0^1 2x^2\,dx=2\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}.$$

$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$ - дисперсия

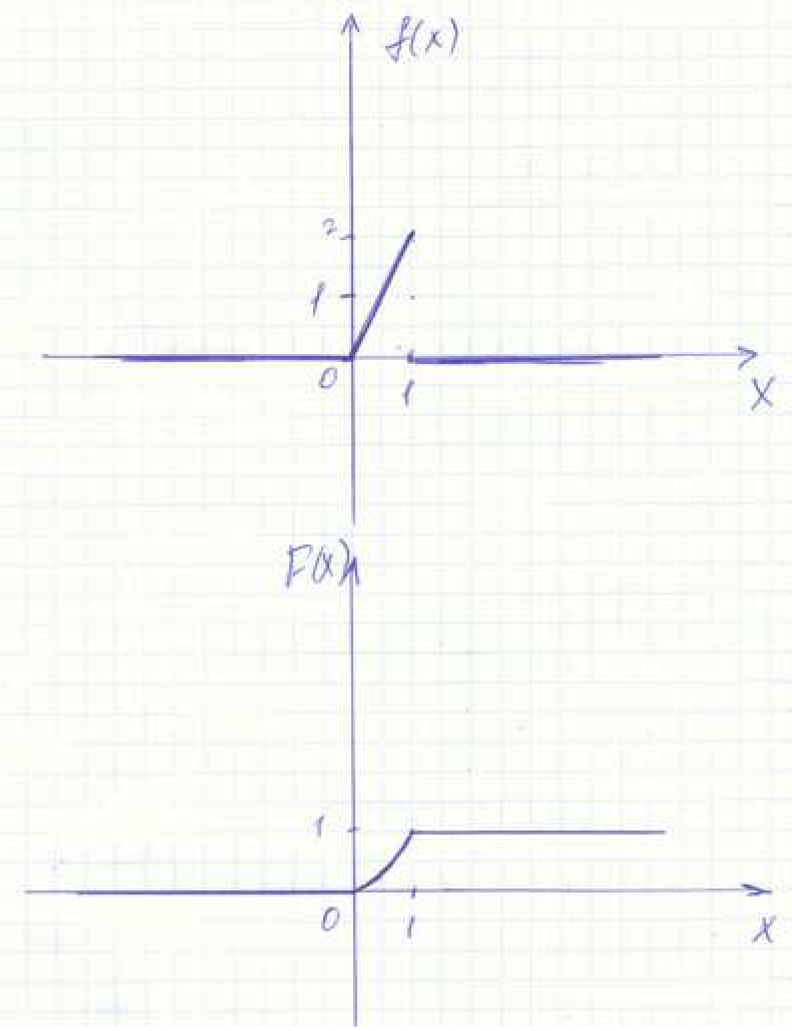
$$D(x)=\int\limits_0^1 2x\cdot x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{9-8}{18}=\frac{1}{18}$$

$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$ - среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{18}}{18}$$

г) $P(0{,}8\le X\le 2)=F(2)-F(0{,}8)=1-0{,}8^2=0{,}36$


f(x)
2
1
0
1
X
F(x)
1
0
1
X

$$\frac{1}{n(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} =$$

$$\frac{A(n^2+5n+6) + B\cdot(n^2+3n) + C\cdot(n^2+2n)}{n(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{An^2 + 5An + 6A + Bn^2 + 3Bn + Cn^2 + 2Cn}{n(n+2)(n+3)}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n

n^0: $1 = 6A$ $\quad A = \frac{1}{6}$

n^1: $5A + 3B + 2C = 0$

n^2: $A + B + C = 0$

$$\begin{cases} 3B + 2C = -\frac{5}{6} \\ B + C = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad B = -\frac{1}{6} - C$$

$$3\cdot\left(-\frac{1}{6} - C\right) + 2C = -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{3}{6} - 3C + 2C = -\frac{5}{6}$$

$$-C = -\frac{5}{6} + \frac{3}{6}$$

$$C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Получим

$$\frac{1}{n(n+2)(n+3)}=\frac{\frac{1}{6}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}+\frac{\frac{1}{3}}{n+3}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{n}-\frac{\frac{3}{6}}{n+2}+\frac{\frac{2}{6}}{n+3}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{2}{6}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Частичная сумма ряда

$$S_n=\frac{1}{6}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{2}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+3}\right);$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{6\cdot 3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{9-4}{36}=\frac{5}{36}$$