Примечание: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$ - факториал числа n.

Разберем «на пальцах», как решать задачи (выбирая нужную формулу) по этой схеме. Ниже вы найдете 6 простых задач по комбинаторике, в каждой описан выбор формулы и решение. Действуйте аналогично, и добьетесь успеха.

Надо заметить, что выбор подходящей формулы – это только первая ступень в умении решать задач по комбинаторике, большинство задач сложнее и требует применения дополнительных правил (например, правило сложения и произведения), а также навыков и способов работы с объектами (разбиения, повторения, откладывания, объединение и т.п.).

На странице Формулы комбинаторики вы найдете дополнительные ссылки на описания важных формул, примеры задач, интересные лекции по комбинаторике, которые помогут в дальнейшем изучении предмета.

Сочетания

Задача. *Сколькими способам можно вывезти со склада 10 ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по 5 ящиков?*

Решение.
По схеме получаем: $n=10, r=5$, порядок не важен, повторений нет.

Нужна формула: *Сочетания* $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

Выбрать 5 ящиков, которые будут погружены на первую машину, из 10 ящиков, можно $C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!5!} = \dfrac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 252$ способами (сочетания из 10 объектов по 5).
Тогда остальные 5 ящиков автоматически погружаем и везем во второй машине.
Итого получаем $N=252$ способа.

Ответ: 252.

Сочетания с повторениями

Задача. *В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений*?

Решение.
По схеме получаем: $n=10, r=12$, порядок не важен, повторения есть.

Нужна формула: *Сочетания с повторениями* $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \dfrac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}$.

Число способов купить 12 открыток равно числу выборок 12 (m) из 10 (n) элементов (видов открыток) без учета порядка с повторениями:

$$\overline{C_{10}^{12}} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12!\cdot(21-12)!} = \frac{21!}{12!\cdot9!} = \frac{13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} =$$

$$= \frac{13\cdot5\cdot17\cdot2\cdot19\cdot7}{1} = 293930.$$

Ответ. 293930.

Размещения

Задача. *Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.*

Решение.
По схеме получаем: $n=11, r=5$, порядок важен (уроки идут по порядку), повторений нет.

Нужна формула: *Размещения* $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Будем считать, что уроки в течение дня не повторяются. Тогда количество вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин определим по формуле размещений:

$A_{11}^5 = \dfrac{11!}{(11-5)!} = \dfrac{11!}{6!} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 55440$ вариантов.

Ответ: 55440.

Размещения с повторениями

Задача. *Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?*

Решение.
По схеме получаем: $n=10, r=6$, порядок важен (шифр набирается в строгом порядке), повторения есть (цифры могут повторяться).
Нужна формула: *Размещения с повторениями* $\overline{A}_n^r = n^r$.

Считаем, что в шифр может входить любая из 10 цифр, всего 6 возможных позиций (длина шифра равна 6 цифрам). Подсчитаем общее число всех возможных комбинаций шифра.
Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть
$N = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^6$.

В терминах комбинаторики это размещения с повторениями из 10 объектов по 6:
$N = \overline{A}_{10}^6 = 10^6$.

Ответ: 10^6.

Перестановки

Задача. *Сколькими способами 4 человека могут разместиться в четырехместном купе?*

Решение.
По схеме получаем: $n=4, r=4$, порядок важен (места в купе различны), нужно выбрать все объекты, повторений нет.
Нужна формула: *Перестановки* $P_n = n!$.

Значит, число различных размещений 4 человек в четырехместном купе – это число всех перестановок из 4 элементов: $N = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ способа.

Ответ: 24.

Перестановки с повторениями

Задача. *Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?*

Решение.
По схеме получаем: $n=8, r=1+1+2+2+2=8$, порядок важен (места на доске различны), нужно выбрать все объекты, повторения есть (есть одинаковые фигуры).
Нужна формула: *Перестановки с повторениями* $\overline{P_n}(r_1,...,r_k) = \dfrac{n!}{r_1!\cdot ...\cdot r_k!}$.

Всего мест на первой линии 8, фигур расставляется также 8, из них 2 одинаковых встречаются три раза. По формуле числа перестановок с повторениями получаем:
$$\overline{P_8}(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{1!1!2!2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2^3} = 5040.$$

Ответ: 5040 способов.