Контрольная работа по высшей математике (МАИ)

Задание 1

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}=\left\{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x(\sqrt{1+x}-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{(\sqrt{1+x}-1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+1)}{1}=\frac{1}{2}*(1+1)=1$$

Задание 2

Найти значение параметра а при котором бесконечно малые функции $\sqrt{x+1}-1; a\sin 2x$ будут эквивалентными при $x\to 0$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{a\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{a\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{a\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{a\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}=$$
$$=\{\sin x\sim x\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{a*2x*(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a*2*(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2a*2}=\frac{1}{4a}$$

Функции эквивалентные, если предел равен 1, получим: $\frac{1}{4a}=1;\Rightarrow a=\frac{1}{4};$

Ответ: $a=\frac{1}{4};$

Задание 3

Найти и исследовать характер точек разрыва функции
$$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, x\neq 0;\\ 0, x=0;\end{cases}$$

Решение

Область определения функции:

$1+x\geq 0;$

$x\geq -1$

Так как функция неопределенна при $x<-1$, то точка x=-1 не является точкой разрыва.

Найдем односторонние пределы и значение функции в точке x=0

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{2};$$
$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{2};$$
$$y(0)=0$$

Так как пределы существуют и конечны, и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то точка x=0 – точка разрыва первого рода. Устранимый разрыв.

Задание 4

Найти производную функции $y=\sqrt[3]{\sin(x^2-x)}$

Решение

$$y'=\left(\sqrt[3]{\sin(x^2-x)}\right)'=\frac{1}{3}(\sin(x^2-x)^{-\frac{2}{3}})*\cos(x^2-x)*(2x-1)=\frac{(2x-1)\cos(x^2-x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x^2-x)}}$$

Задание 5

Найти производную функции $y=(\arcsin x)^{x^2}$

Решение

Логарифмируем

$\ln y = \ln(\arcsin x)^{x^2}$;

$\ln y = x^2 \ln(\arcsin x)$

Дифференцируем как неявно заданную функцию

$\frac{1}{y} y' = 2x \ln(\arcsin x) + \frac{x^2}{\arcsin x} * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y' = y * \left(2x \ln(\arcsin x) + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right)$;

$y' = (\arcsin x)^{x^2} * \left(2x \ln(\arcsin x) + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right)$

Задание 6

Найти интервалы монотонности и экстремум функции $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Решение

Найдем производную

$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} * (-\frac{2x}{2}) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

Приравниваем к нулю и решаем полученное уравнение, таким образом, находим стационарные точки

$e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$;

$e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = 0$;

$1 - x^2 = 0$;

$x = \pm 1$

Если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, то $y' < 0$, значит, функция убывает

Если $x \in (-1; 1)$, то $y' > 0$, значит, функция возрастает

$$y_{\max} = y(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$y_{\min} = y(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}};$$

Ответ: Если $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$, функция убывает

Если $x \in (-1;1)$, функция возрастает

$$y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}};$$

Задание 7

Составить уравнение нормали к кривой $y = \sqrt{10 - x^2}$ в точке $x_0=1$.

Решение

Уравнение нормали имеет вид: $x - x_0 + y'(x_0)(y - y_0) = 0$

Находим производную $y' = \frac{1}{2\sqrt{10 - x^2}} * (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$

Находим значение функции и производной в точке $x_0=1$

$$y_0 = y(1) = \sqrt{10 - 1} = 3;$$

$$y'_0 = y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{10 - 1}} = -\frac{1}{3}$$

Составим уравнение нормали:

$$x - 1 - \frac{1}{3}(y - 3) = 0;$$

$$3x - 3 - y + 3 = 0;$$

$$y = 3x$$

Ответ: $y = 3x$

Задание 8

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

Решение

$$\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}dx = 2\int \cos\sqrt{x+1}d(\sqrt{x+1}) = 2\sin\sqrt{x+1}+C$$

Задание 9

Найти неопределенный интеграл $\int (2x+1)\ln x dx$

Решение

$$\int (2x+1)\ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u=\ln x; dv = 2x+1dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; v=x^2+x \end{matrix} \right\} = (x^2+x)\ln x - \int \frac{x^2+x}{x}dx = (x^2+x)\ln x - \int x+1dx =$$

$$= (x^2+x)\ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$$

Задание 10

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4+9}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}} = \ln(x+2+\sqrt{(x+2)^2+3^2})+C =$$

$$= \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+13})+C$$