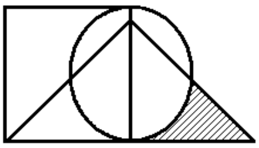
Московский университет им. С.Ю. Витте
Рейтинговая работа
Дискретная математика

Вариант 1

1. Выполнение операций над множествами

Задание 1. Построить выражения над множествами A (круг), B (квадрат) и C (треугольник), которым соответствуют заштрихованные области на заданных диаграммах Эйлера-Венна.



Решение:

Заштрихованной части треугольника соответствует та часть треугольника, которая не имеет общих элементов ни с кругом ни с квадратом. Таким образом, заштрихованной части соответствует выражение:

$C-(A\cup B)$

Ответ: $C-(A\cup B)$

Задание 2. Упростить выражение $(A\cap B)\cap\left(\overline{C}\cup\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)\cap C$ с применением тождеств алгебры множеств.

Решение:

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{C} \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \cap C = (\text{дистрибутивный закон}) =$$

$$= (A \cap B) \cap \left(\overline{C} \cap C \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap C\right) = (\text{дистрибутивный закон}) =$$

$$= (A \cap B) \cap \left(\overline{C} \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C\right) = (\text{закон дополнительности}) =$$

$$= (A \cap B) \cap \left(\emptyset \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C\right) = (\text{закон идентичности}) =$$

$$= (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C\right) = (\text{дистрибутивный закон}) =$$

$$= A \cap B \cap \overline{A} \cap C \cup A \cap B \cap \overline{B} \cap C = (\text{закон дополнительности}) =$$

$$= \emptyset \cap B \cap C \cup A \cap \emptyset \cap C = (\text{закон идентичности}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Ответ: $(A \cap B) \cap \left(\overline{C} \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \cap C = \emptyset$

2. Выполнение операций алгебры логики

Задание 1. Представить в СДНФ функцию $\left(\overline{x_1 x_2} \oplus \left(\overline{x_1 + x_2}\right) x_3\right) \downarrow x_3$

Решение:

Построим таблицу истинности для заданной функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1 + x_2}$	$\left(\overline{x_1 + x_2}\right) x_3$	$\left(\overline{x_1 x_2} \oplus \left(\overline{x_1 + x_2}\right) x_3\right)$	f
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

Для нахождения СДНФ нужно из таблицы истинности выделить лишь те строки, результат которых равен 1. Для данной функции набор строк будет следующим:

x_1	x_2	x_3	f
1	1	0	1

Далее, для каждой строки выписываем конъюнкцию всех переменных по следующему алгоритму: если значение переменной в данной строке равно 1, то в конъюнкцию записываем саму переменную, а если равно 0, то – отрицание этой переменной. После этого все конъюнкции связываем в дизъюнкцию. В результате, совершенная дизъюнктивно-нормальная форма (СДНФ) нашей функции равна:

$x_1x_2\overline{x_3}$

Ответ: $\left(\overline{x_1x_2} \oplus \left(\overline{x_1 + x_2}\right)x_3\right) \downarrow x_3 = x_1x_2\overline{x_3}$

Задание 2. Пусть даны высказывания $A =$ "инфляция – высокая" и $B =$ "снижается эффективность производства". Записать в словесной форме высказывание $F = A \to B$.

Решение:

В словесной форме импликация $A \to B$ читается «если A, то B»

Таким образом, высказывание из условий задачи записывается так:

Если инфляция высокая, то снижается эффективность производства

3. Решение задач теории графов.

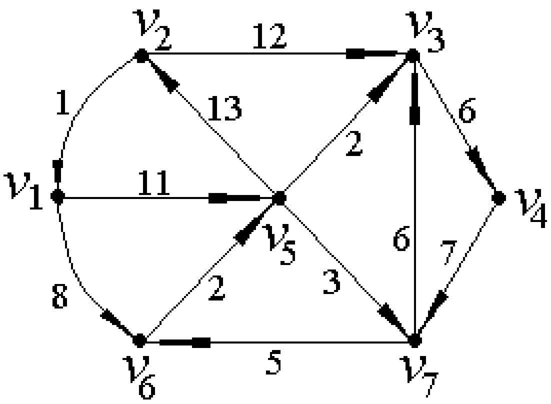
Задание 1. Задана таблица смежности неориентированного графа. Определить число петель в данном графе.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	1	1	1	0
v_3	1	1	1	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	0
v_5	1	1	0	0	0	0
v_6	1	0	0	0	0	0

Решение:

Данная таблица смежности имеет три единицы на главной диагонали, значит, число петель в данном графе равно трем.

Задание 2. Построить матрицу инцидентности для графа, изображенного на рисунке.

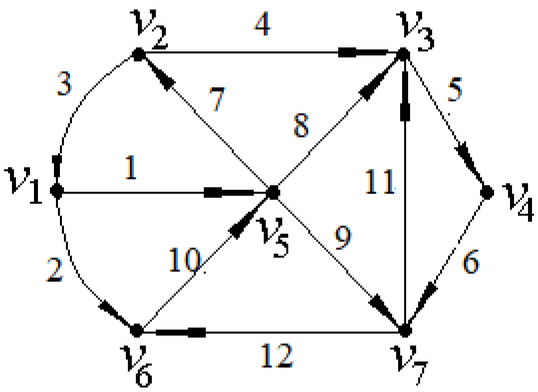


Решение:

Матрицей инцидентности орграфа D называется $(n \times m)$ матрица $B(D) = [b_{ij}]$ у которой элементы равны:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j \\ -1, \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j \\ 0, \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги ребру } x_j \end{cases}$$

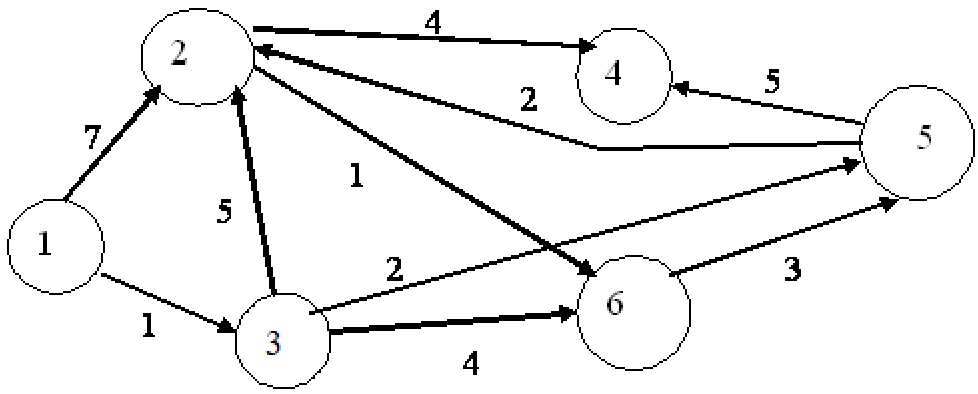
Пронумеруем ребра заданного графа:



$$B(D) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Комбинаторика. Применение графовых моделей.

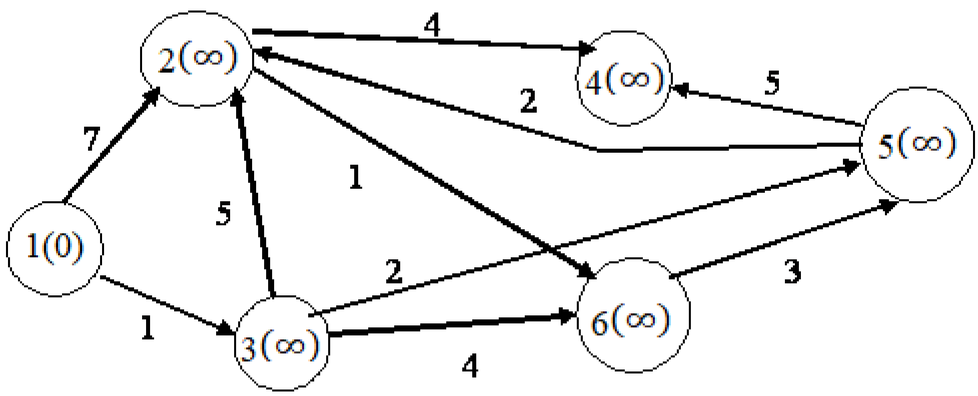
Задание 1. Определить кратчайший путь из одной вершины графа в другую, изображенного на рисунке.



Решение:

Найдем кратчайшие пути из вершины 1 в остальные вершины графа по алгоритму Дейкстры.

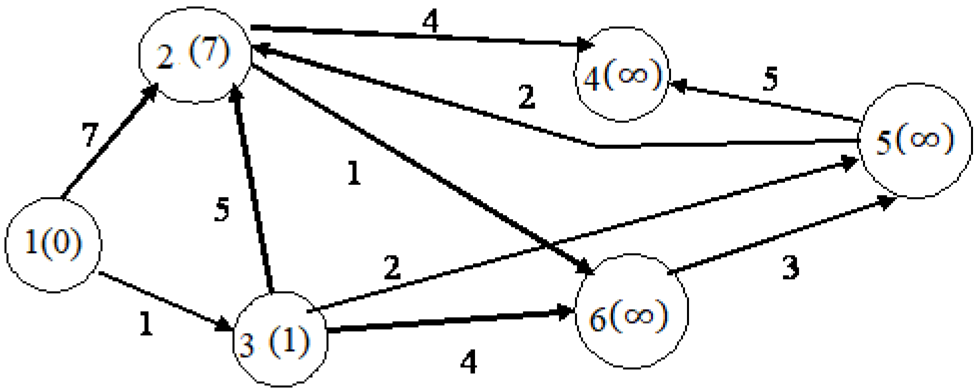
Присваиваем вершине 1 метку 0. Остальным вершинам метку (∞).



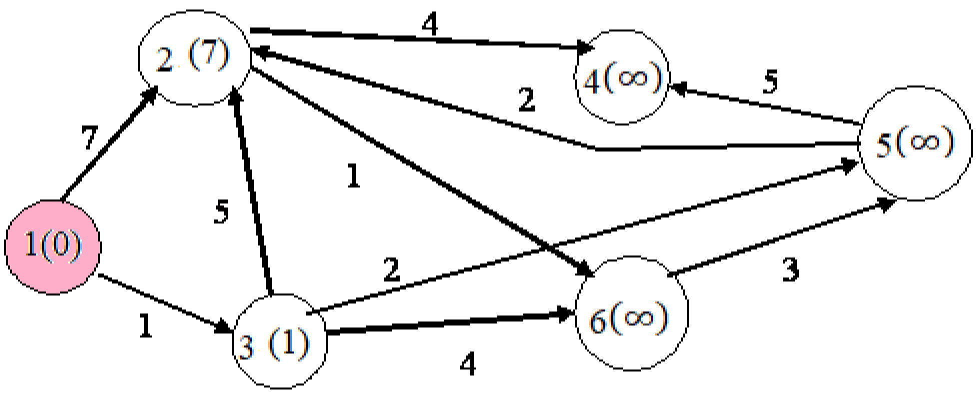
Первый шаг. Минимальную метку имеет вершина 1. Из нее можно попасть в вершины 2 и 3.

Первый по очереди сосед вершины 1 – вершина 3, потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через вершину 1 равна сумме значения метки 1 и длины ребра, идущего из 1 в 3, то есть $0 + 1 = 1$. Это меньше текущей метки вершины 3, бесконечности, поэтому новая метка вершины 3 равна 1.

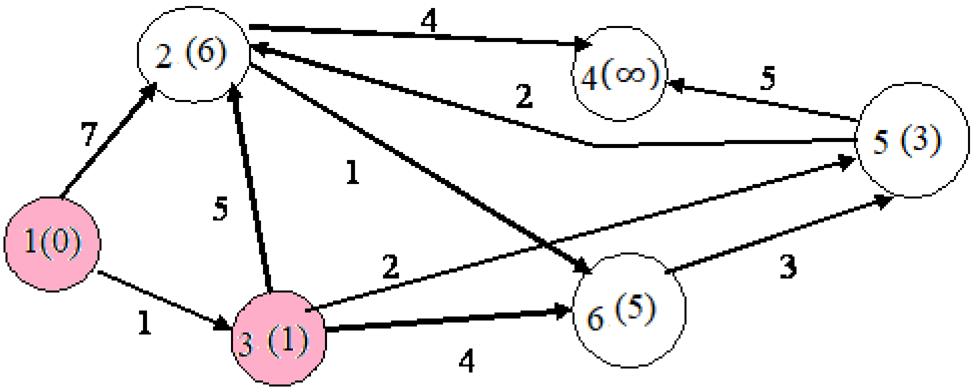
Аналогичную операцию проделываем с вершиной 2.



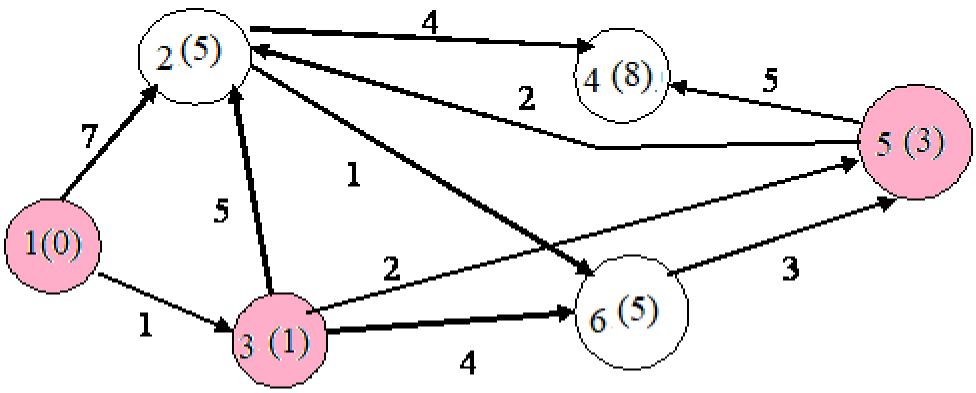
Все вершины, в которые можно попасть из вершины 1, проверены. Отметим, что эта вершина посещена.



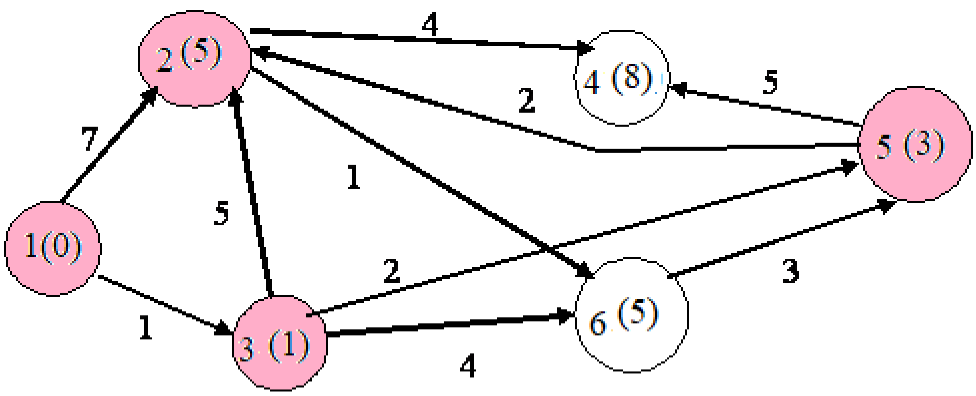
Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим непосещенную вершину с минимальной меткой. Это вершина 3. Снова пытаемся уменьшить метки вершин, в которые можно попасть из вершины 3, а затем помечаем вершину 3 посещенной.



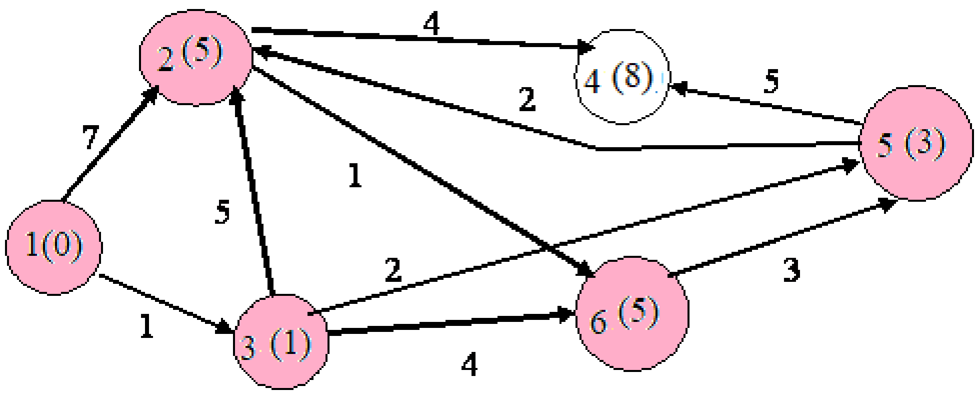
Третий шаг. Снова находим непосещенную вершину с минимальной меткой. Это вершина 5. Работаем с ней:



Следующим шагом выбираем вершину 2:



Следующим шагом выбираем вершину 6:



Алгоритм закончен.

Восстанавливая пути, получаем:

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 2: $5(1 \to 3 \to 5 \to 2)$

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 3: $1(1 \to 3)$

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 4: $8(1 \to 3 \to 5 \to 4)$

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5: $3(1 \to 3 \to 5)$

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 6: $5(1 \to 3 \to 6)$

Задание 2. Найдите разложение полинома $(2x - y)^4$

Решение:

Найдем искомое разложение при помощи треугольника Паскаля. По нему биномиальные коэффициенты для $n = 4$ равны 1,4,6,4,1. Таким образом, по биномиальной формуле имеем:

$$(2x - y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(-y) + 6(2x)^2(-y)^2 + 4(2x)(-y)^3 +$$
$$+(-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$